中国科学: 技术科学
SCIENTIA SINICA Technologica
techcn.scichina.com
《中国科学》杂志社
SCIENCE CHINA PRESS
CrossMark click for updates
论 文

面向工程电磁学的动生麦克斯韦方程组及其求解方法

王中林[1,2,3*], 邵佳佳[1,2]

1. 中国科学院北京纳米能源与系统研究所, 北京 101400;
2. 中国科学院大学纳米科学与技术学院, 北京 100049;
3. 佐治亚理工学院材料科学与工程学院, 亚特兰大 30332-0245, 美国
* E-mail: zlwang@binn.cas.cn

收稿日期: 2022-07-02; 接受日期: 2022-07-27; 网络版发表日期: 2022-08-15

摘要 从物理学四大定律的积分表达式出发, 本文系统介绍了适用于低速、非匀速运动介质电磁场演化规律的动生麦克斯韦方程组, 以及方程组的建立背景和物理图像; 为研究实际工程应用中运动系统的电磁场提供新方法和新思路. 我们认为处理地球上宏观运动物体的电磁现象时, 一般可以忽略相对论效应. 与一般经典教程中默认介质做匀速直线运动(即惯性系)不同, 我们拟解决非惯性系中有加速度运动介质以及介质形状和边界随时间变化的系统中的电磁场动力学问题, 重点描述动生麦克斯韦方程组求解的数学方法、(机械)力-电-磁的多场耦合效应与相互作用等. 最后, 讨论了麦克斯韦方程在微观尺度下边界条件的扩展和在集总电路应用中的处理方法.

关键词 动生麦克斯韦方程组, 非惯性介质运动, 动生极化, 工程电磁学, 伽利略变换, 洛伦兹变换, 狭义相对论

1 引言

麦克斯韦是近代科学史上最杰出的物理学家之一, 他建立的电磁场理论开辟了一种全新的研究电磁现象的“范式”, 奠定了通过“场的相互作用”理解物理世界规律的基础. 正如爱因斯坦所称, 麦克斯韦(James Maxwell)的工作是自牛顿时代以来物理学中最深刻、最富有成果的工作[1,2]. 麦克斯韦构建的电磁理论源于17世纪牛顿的机械论哲学思想, 依据法拉第“极化和电磁感应”的概念展开, 从场的通量角度对电磁现象进行系统的数学梳理, 提出了描述电磁场演化规律的核心方程组——麦克斯韦方程组[3]. 麦克斯韦方程组几乎涵盖了从亚原子尺度到银河系维度范围内的所有电磁现象, 对现代科学和技术产生了深远的影响, 尤其是为现代物理研究电学、磁学和光学提供了坚实的理论基础[4,5].

麦克斯韦方程组自从1861年提出至今一直在不断变化和发展着, 至少经历过两次根本性的改变. 第一次, 奥利弗-海维赛德(Oliver Heaviside)在1885年将最初的20个方程简化为四个对称的矢量方程, 即今天我们熟知的方程组形式[6~8]. 海维赛德的工作深刻揭示了麦克斯韦方程组的对称性: 法拉第电磁感应定律描述

引用格式: 王中林, 邵佳佳. 面向工程电磁学的动生麦克斯韦方程组及其求解方法. 中国科学: 技术科学, 2022, 52
Wang Z L, Shao J J. Maxwell’s equations for a mechano-driven varying-speed-motion media system for engineering electrodynamics and their solutions (in Chinese). Sci Sin Tech, 2022, 52, doi: 10.1360/SST-2022-0226

变化的磁场如何产生电场, 安培-麦克斯韦定律描述变化的电场如何产生磁场. 简化后的方程组同时说明: 电荷(如电子和离子)的周围有电场线, 在静电场中, 电场线从正电荷开始到负电荷结束; 但磁场线没有来源, 磁力线总是闭合的, 没有起点和终点. 可惜的是直到1879年麦克斯韦去世, 他预言的电磁波仍然处于理论探讨阶段. 赫兹(Hertz)经过几年的实验在1888年发表报告终于证实了麦克斯韦的预言: 电磁波是存在的[9,10]. 麦克斯韦电磁理论的第二次修正与物质的微观结构有关. 麦克斯韦最初的目标是构建宏观的电磁学理论, 并没有从微观角度进行严格意义上的分析. 后来, 经过拉莫尔(Larmor)和洛伦兹(Lorentz)的修正, 即将电子作为电荷的源, 电子的流动产生了电流, 这些源最终产生了场[11~13]. 这是继海维赛德和赫兹之后, 麦克斯韦理论在概念上的第二次改进, 尽管基本方程的形式没有变化.

从1820年奥斯特偶然发现导线中的电流可以使小磁针垂直于导线偏转的现象开始, 电磁学的大幕实际上已徐徐拉开. 五年后, 安培(Andre Marie Ampere)发表关于电流产生磁场的表达式(现在称为斯托克斯定理), 将数学分析和实验现象巧妙地融合在一起[14,15]. 麦克斯韦认为该公式形式完美, 精确度无懈可击, 似乎所有的(电磁)现象都可以从中推导出来, 并夸赞这是科学史上最为辉煌的成就之一, 安培是电学中的牛顿[1,2]. 安培的发现对后面几十年电磁学的持续发展至关重要. 1831年, 法拉第发现改变一个电路中的电流会引起相邻电路中产生电流[16]. 接下来的几年里, 他做了数百次实验, 证明这些实验现象可以用磁通量的概念进行解释. 通量概念的引入是麦克斯韦方程组后续发展的一个重要里程碑, 为四大物理定律的数学表示奠定了基础. 为了形象地描述实验结果, 法拉第又创造性地提出“力线”(lines of force)的概念, 他认为“场”的变化是引起电磁现象的主要原因. 这一概念被当作现代“场论”的来源, 至今仍被用来帮助理解电磁场的演化规律. 更进一步地, 到了1834年, 楞次(Emil Lenz)提出判断感应电流方向的规则——楞次定律, 将法拉第的实验发现进一步定量化[17,18]. 麦克斯韦的开创性工作是系统总结前人的研究成果最终形成一个较为完整的电磁理论, 同时也奠定场论的理论基础. 我们现在所熟悉的电磁场理论实际上是经过诸多科学家不断发展完善和智慧的结晶.

目前常见到的麦克斯韦方程组是假设在惯性系中、介质处于静态的条件下推导而得到的, 其中心思想是只考虑电场和磁场的相互转换与作用, 并不引入其他机械外力所做的功. 惯性系中匀速运动介质的电磁场演化规律一般通过洛伦兹变换求得. 这样处理保持了电动力学理论的完美和对称性. 然而, 正如爱因斯坦所说, 狭义相对论不适用于变速运动, 比如方向不断改变的旋转运动; 另外, 狭义相对论也并没有考虑万有引力的作用. 特别地, 当介质的体积、形状和边界随时间发生变化, 且以任意速度场$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$沿不同轨迹运动时, 相对论电动力学的数学解法极其复杂, 很难解决电磁场的演化规律问题, 尤其是系统中存在多个运动介质的情况(图1所示). 最近, 我们从麦克斯韦方程组的积分形式出发, 构建了非匀速运动介质的

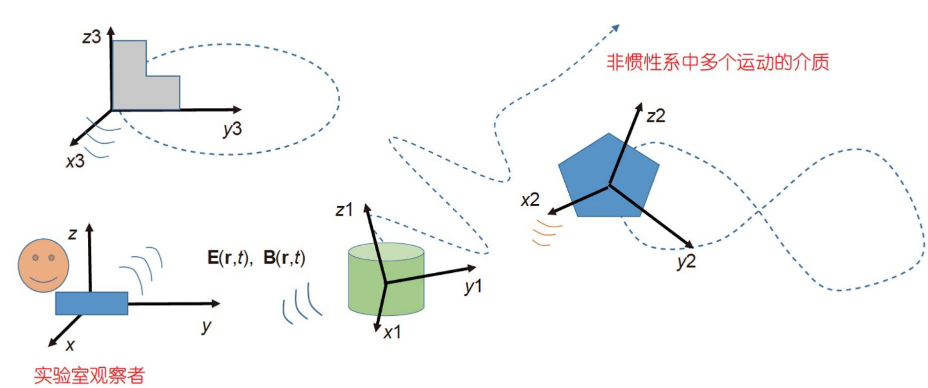

图 1 存在外力作用的运动介质系统, 观察者在地面坐标系(实验室坐标系)观察: 不同介质以不同的速度沿着虚线所表示的轨迹运动. 在此情况下, 洛伦兹变换难以解决问题[19,21]

Figure 1 Mechano-driven moving media system: a general case in which the observer is on the ground frame (called Lab frame), with several media moving at complex velocities along various trajectories as represented by the dashed lines. In such a case, the Lorentz transformation for special relativity cannot be easily applied [19,21].

动生麦克斯韦方程组，通过引入机械力-电-磁的多场耦合，为解决上述问题提供了新方法和新思路[19~21]. 虽然构建的方程组不具有洛伦兹协变性，没有考虑相对论效应，但在地球上人类主导的实际工程应用条件中，应该足以准确描述一般系统中力-电-磁之间的相互作用.

由于电磁场理论对科学和技术产生的巨大影响，电磁现象的应用几乎涉及人类生活的方方面面，主要表现在电气工程、光学、无线光通信、计算机、遥感、生物医学工程等领域. 严格来讲, 宇宙间几乎不存在惯性系, 它只是一种理论上假设的理想状态. 在工程技术中，我们遇到的情况都是处于非惯性系中、具有加减速度的运动. 因此，本文重点介绍具有加速度、刚性平移运动介质中的、描述力-电-磁三场耦合的动生麦克斯韦方程组(Maxwell's equations for a mechano-driven system). 系统阐述构建非匀速运动介质中动生麦克斯韦方程组的建立背景、物理图像、与经典方程的区别和联系. 同时对求解动生麦克斯韦方程组的相关数学方法进行讨论. 为了强调动生麦克斯韦方程组在工程技术方面的潜在应用，我们以经典麦克斯韦方程组在电气工程领域的应用为例，讨论了抽象建模时需要满足的总原则，并证明麦克斯韦方程和基尔霍夫定律之间的关系. 在这些原则指导下，我们提出了摩擦纳米发电机结构设计和高频工作的基本原则. 最后对相关理论进行总结，并对下一阶段拟解决的关键问题提出了建议, 未来的发展前景进行展望.

2 非匀速刚性平移运动介质中的麦克斯韦方程组

2.1 实验需求与理论启发

如前所述，常见的教科书中的麦克斯韦方程组用来描述体积固定、边界不变且处于静止状态介质的电磁场演化规律. 然而，这些假设很少在文献资料中提到；因此，我们大多数研究人员认为麦克斯韦方程组是普适的. 比如研究运动介质的电磁场变化，则需要更详细的边界条件. 到现在为止，运动系统的电磁场研究有比较长的时间. 麦克斯韦将变化的电通量加入到安培定律中，将原来安培定律只适用于静态情形推广到了时变情形[22]. 赫兹系统地扩展了麦克斯韦关于运动介质电磁场的理论体系，但其只适用于运动的导体[23]. 目前依据洛伦兹变换阐述运动介质的电动力学所用的方法是由闵可夫斯基(闵氏)在1908年提出[24]. 闵氏认为麦克斯韦方程组满足相对性原理，即保持洛伦兹协变性. 在某种程度上，在相对论和闵氏解决方案提出之后，其他不同的研究思路和方法几乎都停止了[25,26]. 近年来，随着科学技术的持续发展以及新问题的出现，重新引起研究人员对相关问题的兴趣. 其中，利用麦克斯韦方程组研究运动系统的电磁场比较多，例如与介质相关的电磁波散射、反射和传输，以及如何建立"第一性原理"方程等方面，而方程的解析解及技术应用少有实质性进展[27~29].

自从狭义相对论诞生后，研究运动介质系统的电磁场主要利用闵氏的处理方法，即处理有且只有一种介质做匀速直线运动时的情形. 先假定介质的性质和本构关系在与介质相对静止的共动坐标系已知，应用场矢量的洛伦兹变换公式推导出介质以速度$\mathbf{v}_0$做匀速运动的实验室坐标系中的本构方程，然后求解麦克斯韦方程得到电磁场变化规律. 必须指出此处的运动是匀速直线运动，即没有外力作用下的惯性系，且只有一种介质. 在这种情况下，电场和磁场的总能量是守恒的.

然而, 最近的实验现象引起大家新的思考, 并提出了新问题. 2012年王中林研究组[30,31]首先发明的摩擦纳米发电机(triboelectric nanogenerator, TENG)是利用介质之间的接触起电效应和相互运动把外界的机械能转化为电能的新型能量转换器件，在实际工程中有广泛的应用前景. TENG的原理是基于介质之间的相对非匀速运动，由于运动而导致介质极化，进而产生动生位移电流将输入的机械能转换为电能[30~32]. 比如我们设计的转动式摩擦纳米发电机，当转子高速旋转时，十几厘米远处放置的金属棒能检测到变化的电场-动生位移电流, 并在无线状态时把多个LED灯点亮[33]. 另外，借鉴MEMS技术，一个大约50 μm的微型摩擦纳米发电机的工作频率可达兆赫兹水平. 在63 kPa@1 MHz超声输入时，该微型发电机输出约16.8 mV的电压(在油介质中)，信噪比为20.54 dB，具备调制入射信号进行射频通信的可能[34]. 最近，一个尺寸仅为9 mm ×9 mm的自供电无线传感器，能将机械驱动产生的电磁信号传播到几十米之外[35]. 上述不同类型摩擦纳米发电机的物理原理都涉及运动介质电磁场的产生和传输情况. 因此, 研究运动介质系统的电磁场不但可以深

刻理解工作频率达MHz~GHz的摩擦电纳米发电机的工作机制，同时有助于探索解决高频机械运动所驱动的电磁辐射传输无线信号的可能性．基于目前大量的实验现象，我们认为有必要深入探索非惯性系中运动介质的电动力学问题.

对于一般非匀速运动的介质，我们的思路是不采取共动坐标系和实验室坐标系之间的时空坐标变换，因为这种坐标变换一般适用于匀速直线运动的介质，对于非惯性系其数学就很复杂，难于得到实际中实用的结果．我们直接从四大物理定律的积分形式出发，在伽利略时空观下构建动生麦克斯韦方程组[19,20]．新方程组可能不具有洛伦兹协变性，但更易于解决现实中的工程技术问题．麦克斯韦方程组所基于的四大物理定律的积分表达式如下.

(1) 高斯电定律: 穿过闭合曲面的电通量正比于曲面包含的总电荷(Electric flux through an arbitrary surface is proportional to the total charge enclosed by the surface).

$$\iint_S \mathbf{D}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{1a}$$

注意，为了与我们之前在文献[19]中的标记保持一致，方程中$\mathbf{D}'$指实验室坐标系中的电位移矢量，而不是来自于共动坐标系.

(2) 高斯磁定律: 磁单极不存在, 它不是磁通量的源(There are no magnetic monopoles as sources of magnetic flux).

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0. \tag{1b}$$

(3) 法拉第电磁感应定律: 穿过曲面的磁通量的变换率等于感生电场的环量(The time rate of change of magnetic flux is a source of electric circulation).

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_C \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{1c}$$

(4) 安培-麦克斯韦定律: 穿过曲面的电通量的变化率和曲面包含的电流等于感生磁场的环量(Electric conduction current and displacement current are sources of magnetic circulation).

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \iint_C \mathbf{J}_f \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_C \mathbf{D}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{1d}$$

如果介质在实验室坐标系是静止的，并且它的形状和边界不随时间变化，方程(1c)和(1d)中的时间微分可以和表面积分互换，在伽利略时空观的前提下，r和t是完全独立的，相应的麦克斯韦方程组微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_{\mathrm{f}}, \tag{2a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{2c}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'. \tag{2d}$$

必须指出从方程组(1)到(2)是在伽利略时空观下推导得到的，即时间和空间是独立的．依据相对论理论，微分形式的麦克斯韦方程组具有洛伦兹协变性．实际上协变性成立的前提条件是方程组描述的是惯性系中的电磁现象，即介质处于静止状态或匀速直线运动状态．反之，在非惯性系中有外力作用时，方程组的协变性可能无法成立．比如，考虑一个电荷在不同参考系中所受洛伦兹力的情况：在实验室坐标系中，电荷q以速度$\mathbf{v}$运动，所受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{3}$$

在共动坐标系中，电荷q相对于该坐标系本身处于静止状态，因此只受到电场$\mathbf{E}$的作用，则$\mathbf{F}'=q\mathbf{E}'$．根据力学基本原理，如果两个坐标系都是惯性系，则要求$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0$：电荷在惯性系中所受到的力是相同的；因此，$\mathbf{F}'=\mathbf{F}$．只有在此条件下，电场矢量的变换公式：$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}$才成立(注意这里是$\mathbf{v}_0$而不是$\mathbf{v}$)[36]．如果不是惯性系，则必有外力作用，此时$\mathbf{F}'\neq\mathbf{F}$，$\mathbf{E}'\neq\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$，法拉第电磁感应定律(2c)和安培定律(2d)的表达式可能需要改变．因此利用法拉第电磁感应定律处理非惯性系的相关问题时，一定要考虑是否需要修正或延伸表达式，这一点在一般的教课书中未提到．因为教材中基本上描述的是惯性系中的电磁现象；反之，则会出现偏差．同样的道理也适用于安培-麦克斯韦定律.

有的读者以Jackson，Landau，Feyman等的著作为例，讨论麦克斯韦方程组的协变性问题，实际上其处理方法都是建立在介质做匀速直线运动的条件下，处理的是惯性系中的电磁现象．该条件被很多学者所忽略，因而误认为一些表达式的微分形式是普适的．以上文分析为例，我们已明确指出在具有加速度运动介质的非惯性系中，由于惯性力的存在，法拉第电磁感应定律的微分表达式要做适当的修正！因此，标准微分型

法拉第电磁感应定律的表达式仅适用于惯性系，标准微分型麦克斯韦方程组的表达式也只适用于惯性系.

2.2 积分形式

四大物理定律(1a)~(1d)可用来研究同一参考系中运动介质的电磁变化情况，这是我们推导形状与速度均依赖时间的运动介质的麦克斯韦方程组微分形式的出发点. 假设介质的运动速度远小于光速，即$v \ll c$，并忽略相对论效应，且只考虑一个坐标系；在该坐标系中，观察者是静止的，介质在空间中以任意低速运动[19]. 如图2所示, 观察者所在的坐标系中, 介质A处于静止状态，介质B运动；当然也可能存在做变速运动的另外一种介质. 这种情况与狭义相对论明显不同, 后者描述的是不同参考系的观测者对同一事件的观测结果. 若介质的体积和边界随时间发生变化, 尤其是存在外力作用时, 相关的数学计算会非常复杂, 相对论电动力学无法精确解决上述问题. 我们从麦克斯韦方程组的积分形式出发，不需要任何坐标变换，研究观察者所观测到的电磁现象. 此时所有的场矢量都在观察者的坐标系中进行表示，相关变量也在同一坐标系中定义.

现在考虑介质运动和边界随时间变化的情形. 利用场论中时间微分作用在通量上的数学等式，在伽利略时空观的前提下，由公式(1c)和(1d)，并结合公式(1a)和(1b)和斯托克斯定理, 则[20]

$$\iint_S \mathbf{D}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \iiint_V \rho_\mathrm{f} \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{4a}$$

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0, \tag{4b}$$

$$\int_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = -\iint_C \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}, \tag{4c}$$

$$\int_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = \iint_C (\mathbf{J}_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{f}\mathbf{v}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} + \iint_C \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{D}') \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}. \tag{4d}$$

公式(4c)左边表示感生电场对沿着C路径移动的单位电荷所做的环路功. 右边第一项表示磁场变化产生的磁通量变换率，加上由介质运动引起的洛伦兹力对单位电荷沿闭合路径移动所做的功(动生电动势). 公式(4d)左边为磁场沿着整条路径的环量(电动势)；右边第一项表示流过开曲面的总电流与由介质运动导致的自由电荷产生的电流之和；第二项表示穿过开曲面的电位移矢量的变化率(位移电流)；第三项为介质运动导致的电通量的变化率. 介质运动所引入的$\mathbf{v}\times\mathbf{B}$和$\mathbf{v}\times\mathbf{D}'$两项可以看作是介质运动而产生的电磁波的源.

2.3 微分形式

利用斯托克斯定理和散度定理，对于具有任意运动场$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$的介质，动生麦克斯韦方程组的微分形式为[20]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t) = \rho_\mathrm{f}(\mathbf{r}, t), \tag{5a}$$

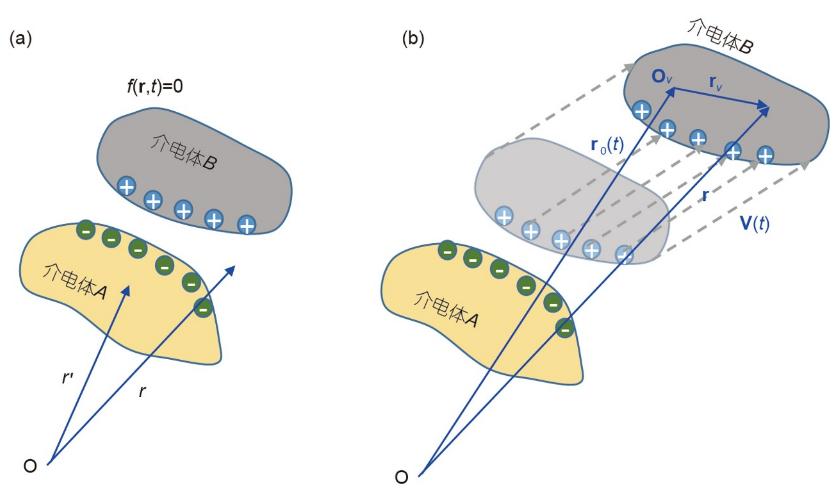

图 2 描述运动介质系统的示意图, 其中每个介质的体积和表面都与时间有关, 并且不同介质以任意速度场移动[19]

Figure 2 Schematic diagram showing the translation movement of dielectric media in space with speed $\boldsymbol{v}$ under the driving of an external force $\mathbf{F}$; note that the volume and boundaries of the media vary with time, especially with any translation speed [19].

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0, \tag{5b}$$

$$\nabla\times[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{5c}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times[\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)]\\&=\mathbf{J}_{\rm f}(\mathbf{r},t)+\rho_{\rm f}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'(\mathbf{r},t).\end{aligned} \tag{5d}$$

上述结果与Kaufman等人[37]的结果一致. 虽然扩展后的方程组可能不满足洛伦兹协变性, 但对于缓慢移动的介质, 特别是当运动速度任意且介质数目大于两个时, 这样的处理方法可能最简便. 相应的电荷守恒定律变形为[20]

$$\nabla\cdot\left[\mathbf{J}_{\rm f}(\mathbf{r},t)+\rho_{\rm f}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\rm f}(\mathbf{r},t)=0, \tag{6}$$

其中, $\rho_{\rm f}\mathbf{v}$表示以一定速度$\mathbf{v}$运动的自由电荷所产生的局部电流.

结合刚性平移运动介质中的麦克斯韦方程组的积分形式(4a)~(4d), 其边界条件为[19,20]

$$[\mathbf{D}'_2-\mathbf{D}'_1]\cdot\mathbf{n}=\sigma_{\rm f}, \tag{7a}$$

$$[\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1]\cdot\mathbf{n}=0, \tag{7b}$$

$$\mathbf{n}\times\left[\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1-v\times(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\right]=0, \tag{8a}$$

$$\mathbf{n}\times\left[\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1-v\times(\mathbf{D}'_2-\mathbf{D}'_1)\right]=\mathbf{K}_{\rm S}+\sigma_{\rm f}\mathbf{v}_{\rm S}, \tag{8b}$$

式中, $\mathbf{n}$为表面法线方向, $\mathbf{K}_{\rm S}$为表面电流密度, $\sigma_{\rm f}$为表面自由电荷密度, $\mathbf{v}_{\rm S}$为平行于边界的介质的移动速度.

3 刚性平移运动介质中的动生麦克斯韦方程组

3.1 动生极化项$\mathbf{P}_{\rm S}$的引入与位移电流

在外力作用下, 介质的形状和运动状态通常会发生变化. 介质表面由于接触起电或压电效应而产生静电荷. 当介质形状或运动状态发生变化时, 不仅会导致介质表面局部的电荷密度$\rho_{\rm S}$随时间变化, 同时引起局部的“虚拟”电流密度, 进而引起介质极化. 为了描述这些现象, 在位移矢量中加入$\mathbf{P}_{\rm S}$项; $\mathbf{P}_{\rm S}$由外力作用引起, 表示介质表面因存在静电荷而导致的极化, 称为动生极化. 如图3所示, 修正后的电位移矢量表达式为[19,20,30~32]

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}'+\mathbf{P}_{\rm S}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}+\mathbf{P}_{\rm S}=\varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E}+\mathbf{P}_{\rm S}, \tag{9}$$

公式中第一项$\varepsilon_0\mathbf{E}$是自由电荷引起的电场, 第二项$\mathbf{P}$代表介质内部的极化——感应极化; 第三项$\mathbf{P}_{\rm S}$为动生极化项. 注意, $\mathbf{P}_{\rm S}$主要由于表面静电荷的存在或边界形状随时间变化引起; 因此可以从理论上解释摩擦纳米发电机的工作机理. 无论是物理意义和数学表达式都与感应极化不同, 因此两者不能合并.

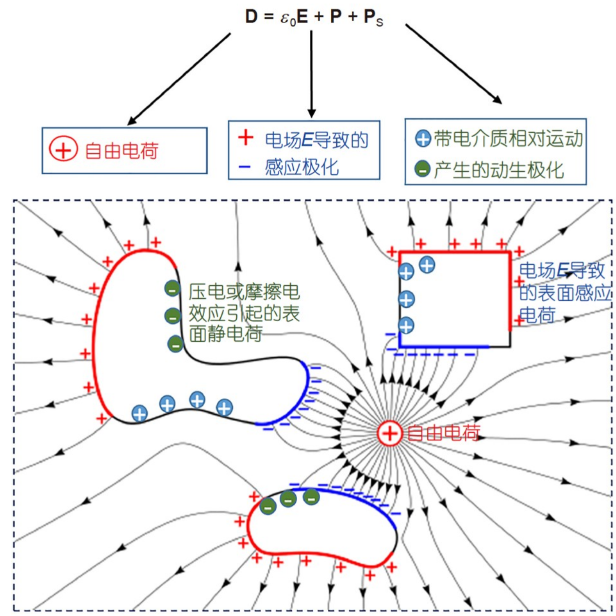

图 3 重新定义的位移矢量$\mathbf{D}$由三项组成, 其中$\mathbf{E}$表示外界自由电荷产生的电场, $\mathbf{P}$代表介质内的感应极化, $\mathbf{Ps}$表示带电介质相对运动产生的动生极化[19,21]

Figure 3 Schematic showing the three terms in the newly defined displacement vector **D**, where **E** represents the electric field in the medium, **P** represents the polarization caused by external electric field, and **Ps** represents the polarization owing to the pre-existing electrostatic charges on the media [19,21].

由公式(9), 位移电流的表达式为

$$\mathbf{J}_{\rm D}=\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_{\rm S}, \tag{10}$$

$\frac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}$代表时变电场引起的位移电流, 称为感应位移电流, $\frac{\partial\mathbf{P}_{\rm S}}{\partial t}$代表带电介质在外力的作用下产生的电流, 称为动生位移电流. 在纳米发电机中, 该项是将机械能转化为电能的关键. 位移电流不是真正意义上的电流, 它可以在介质中产生, 也可以在真空中产生. 位移电流加入到安培环路定律中至少起到两方面的作用, 一方面, 位移电流的引入修正了安培环路定律, 即除了传导电流之外还有一个额外的电流. 麦克斯韦之前的电磁理论方程, 包括电荷守恒方程, 在引入位移电流之前内

部是矛盾的, 不自洽的, 麦克斯韦修正了这一缺陷. 另一方面, 像真正的电流一样, 位移电流也会产生磁场, 其本质核心是增加了"变化的电通量产生磁场"这一重要概念; 此时安培环路定律变为安培-麦克斯韦定律. 预言电磁波的关键是理解"变化的电场产生磁场, 变化的磁场产生电场", 变化的电场和磁场互相感生而传播, 从而形成电磁波.

3.2 动生麦克斯韦方程组

在引入动生极化$\mathbf{P}_S$项后, 方程组(5a)~(5d)进一步变形为[20]

$$\nabla\cdot\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)=\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r},t)-\nabla\cdot\mathbf{P}_{\mathrm{S}}(\mathbf{r},t), \tag{11a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0, \tag{11b}$$

$$\nabla\times[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t), \tag{11c}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times\left[\mathbf{H}(\mathbf{r},t)+\mathbf{v}(\mathbf{r},t)\times\left(\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}_{\mathrm{S}}(\mathbf{r},t)\right)\right]\\&=\mathbf{J}_{\mathrm{f}}(\mathbf{r},t)+\rho_{\mathrm{f}}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{D}'(\mathbf{r},t)+\mathbf{P}_{\mathrm{S}}(\mathbf{r},t)].\end{aligned} \tag{11d}$$

方程中所有的物理量都是观察者所在参考系($\mathbf{r}$, t)的函数. 因此, 方程(11a)~(11d)可以描述因外界机械力而发生形变的、任意速度场下缓慢运动介质的电磁场演化规律. 更进一步, 动生麦克斯韦方程组本质上阐释的是一个力-电-磁多场相互耦合的复杂系统.

公式(11)由两部分构成: 第一部分与介质的运动速度$\mathbf{v}$成正比, 比如$\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, 表示洛伦兹力对局域电场的贡献. 公式(11d)中的$\mathbf{v}\times(\mathbf{D}'+\mathbf{P}_S)$表示当介质运动到有电场存在区域时产生的感应电流. 另一部分是方程组中与$\mathbf{v}$无关的项, 它们的含义与原来相同, 表示电磁波的传播和散射及其与物质间的相互作用. 这一部分应该是洛伦兹协变的, 但第一部分与$\mathbf{v}$相关的项可能不保持协变性. 若$\mathbf{v}$是常数, 在惯性系中, 动生麦克斯韦方程组也不具有洛伦兹协变性, 因为该方程是在伽利略时空观基础上推导得到的. 因为机械驱动引起的$\mathbf{P}_S$项表示系统中输入了外部的能量或动量, 系统的加速/减速度可能已发生改变. 此时, 系统的电磁能量不守恒, 但封闭系统的总能量守恒.

4 力-电-磁多场耦合下的能量守恒定律

电磁场具有自己的能量和动量(包含角动量). 在研究电磁现象过程中, 我们可以研究其他运动形态的能量和动量变化来理解电磁场的能量和动量, 也可以通过研究电磁能量和电磁动量来考察其他运动形态的能量和动量演变过程. 比如, 带电粒子在电磁场中运动时, 能够从电磁场中获得能量和动量, 或者说带电粒子与电磁场之间存在能量和动量交换. 我们以能量守恒为例, 理解力-电-磁多场耦合下的能量变化规律. 图4为高频振荡交流电源产生电磁辐射向空间中传输能量的过程. 在图4(a)中, 对电容器的两个金属电极施加高频交流电, 随着电容器张开的角度增大, 向外"泄露"的电场越来越大. 根据安培-麦克斯韦定律, 随时间变化的电场产生磁场, 变化的磁场感生电场, 最后形成电磁场向空间辐射. 图4(b)是以接触分离式摩擦纳米发电机为例模拟产生电磁波的过程. 与图4(a)不同, 图4(b)中介电层表面存在摩擦电荷($\mathbf{P}_S$项). 当施加周期性外力时, 尤其是工作频率足够高时, 电极上的电荷与摩擦电荷的共同作用下将导致交变电磁场产生并向周围空间辐射; 激发的电磁场反过来作用到该发电机上, 影响电极和摩擦层表面的电荷分布. 因此, 一定要考虑由$\mathbf{P}_S$项产生的电磁场.

从公式(11a)~(11d)出发, 我们对力-电-磁耦合系统的能量流动情况进行分析. 对于含有$\mathbf{P}_S$项的低速运动介质, 其能量变化为[19,20]

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial t}u-\nabla\cdot\mathbf{S}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\rho_{\mathrm{f}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\\&-\left\{\mathbf{H}\cdot[\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})]+\mathbf{E}\cdot\left[\nabla\times\left(\mathbf{v}\times(\mathbf{D}'+\mathbf{P}_{\mathrm{S}})\right)\right]\right\},\end{aligned} \tag{12}$$

其中, $\mathbf{S}$为坡印廷矢量, 表示单位时间内电磁场通过单位面积向外传递的能量, 表达式为

$$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}, \tag{13a}$$

$\frac{\partial}{\partial t}u$代表系统内电磁场的能量密度变化率,

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}. \tag{13b}$$

公式(12)说明包含在一定体积中的电磁场能量与从该体积表面辐射出去的电磁能量之和等于电场对外部自由电流和自由电荷做的功, 加上介质在空间运动引起的电磁能量密度的变化. 因此, 在有外力作用时, 电磁能量不守恒. 描述外力作用下运动介质系统的麦克斯韦方程组不保持洛伦兹协变性, 因为此时机械能和电磁能之间存在能量转换.

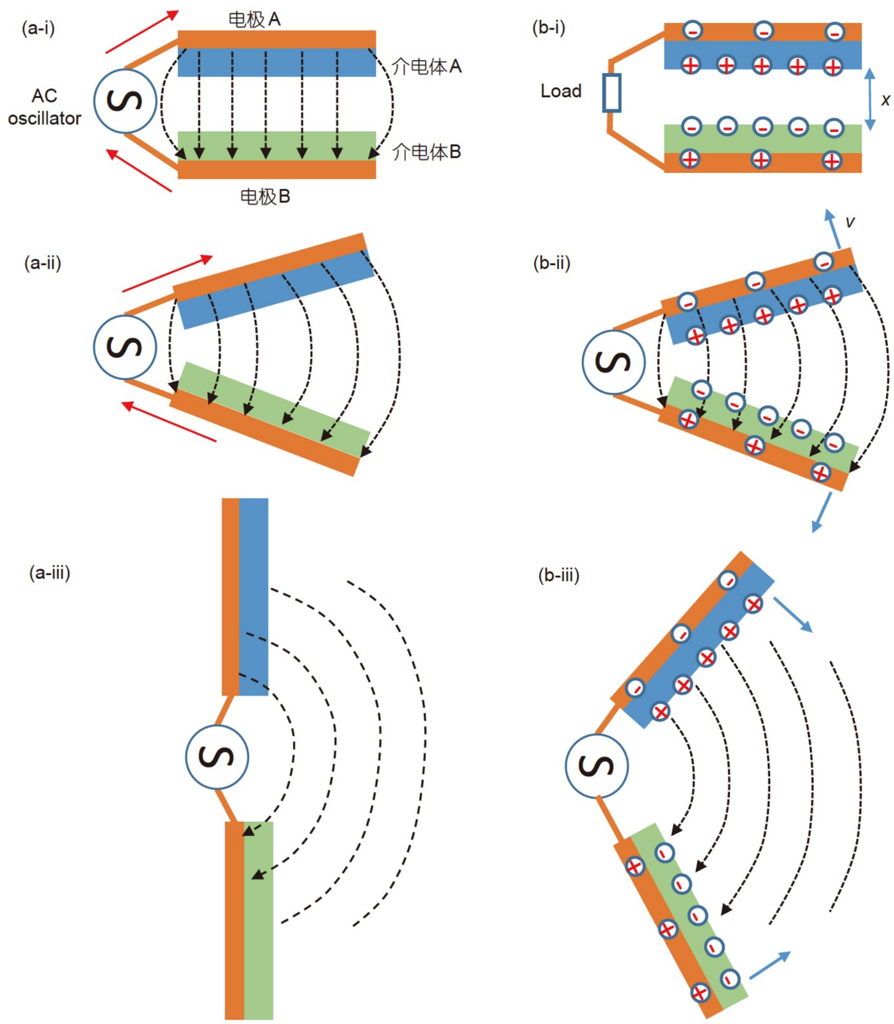

图 4 (a)交流振荡源产生电磁辐射的基本过程，与(b)外界机械循环驱动下电磁辐射和摩擦纳米发电机能量转换过程之间的耦合情况进行比较[19]

Figure 4 (a) the basic process of creating electromagnetic radiation by an oscillating AC source; (b) the coupling between electromagnetic wave radiation and the triboelectric nanogenerator as driven by cycled mechanical triggering is step by step demonstrated [19].

当速度项只与时间有关时$\mathbf{v}(t)$，即刚性平移的介质，公式(12)简化为[19,20]

$$-\frac{\partial}{\partial t}u-\nabla\cdot\mathbf{S}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}+\{\mathbf{H}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{B}]+\mathbf{E}\cdot[(\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathbf{D}']\}. \tag{14a}$$

上式等效于

$$-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u-\nabla\cdot\mathbf{S}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_{\mathrm{f}}, \tag{14b}$$

其中,

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}u=\mathbf{E}\cdot\frac{\mathrm{D}\mathbf{D}}{\mathrm{D}t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\mathrm{D}\mathbf{B}}{\mathrm{D}t}, \tag{14c}$$

且

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla. \tag{14d}$$

由公式(14)可知，介质运动是产生电磁波的“源”之一，运动的介质是“运动的电磁场源”. 这里描述静止介质的能量密度u和能流密度$\mathbf{S}$的表达式对运动介质体系仍然适用，因为场分布在整个空间且总能量是守恒的. 注意力-电-磁场耦合系统能量变化与一般描述电磁波携带电磁能量系统的区别. (1) 此处电磁场与运动介质系统并存. 介质本身与电磁场之间存在相互作用, 在高频加速运动时介质会因不断向外发射电磁波而消耗能

量; 但由于外界作用力施加在介质上, 单独考虑介质与电磁场组成的系统能量, 应该不守恒. (2) 由于电场/磁场力对介质做功, 包围在一定体积内的电磁能量, 除了一部分从体积表面流出之外, 还有一部分消耗在介质上. 比如$\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}_f$表示存在电场$\mathbf{E}$时, 由于传导电流的流动而消耗的欧姆功率(通常以热量形式散发). (3) 当介质运动速度为零时, 上述方程与原经典方程的区别由$\mathbf{P}_S$项引起. 另外需要注意的是, 在惯性系中, 若已知静止介质的能量密度u和能流密度$\mathbf{S}$等的表达式, 则运动介质的相应表达式可以被唯一确定, 因为一个坐标系中的场的张量分量可以从另一个坐标系中的张量分量推导而得[38].

5 运动介质中的本构关系

介质的本构关系是求解麦克斯韦方程组必不可少的条件之一. 如前所述, 麦克斯韦构建宏观的电磁学理论时并没有从物质的微观结构角度进行考虑. 1892年, 洛伦兹提出了构成物质的原子可能由带电粒子组成的理论, 并认为带电粒子(电子)在原子内的振动是光的来源. 同时, 洛伦兹结合麦克斯韦方程提出一个微观理论, 其核心是用带电的原子片段、离子和电子等来描述物质的性质, 并推导出带电粒子在电场和磁场作用下受力的表达式(洛伦兹力)[11~13]. 洛伦兹构建的微观机制对麦克斯韦方程组的成立有着巨大的意义. 介质的微观结构模型是后来随着对材料基本结构和性能不断加深理解而建立的. 存在电磁场时, 微观模型能否反应介质的性能变化是关注的重点. 闵可夫斯基在1908年提出使用相对性原理方法探索运动介质的电磁场随时间演化规律. 此时, 静止介质的本构方程已经预先知道, 通过洛伦兹变换可求出运动介质的本构关系, 进而求解麦克斯韦方程组.

一般推导中, 通常假定介质是各向同性的, 本构关系表达式为$\mathbf{D}'=\varepsilon\mathbf{E}$和$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, 但这些关系只对静止介质有效. 对于匀速运动的介质, 我们须使用从洛伦兹变换推导得出的本构关系[39,40]:

$$\mathbf{D}'=\varepsilon\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}, \tag{15a}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu+\varepsilon\mathbf{v}_0\times\mathbf{E}, \tag{15b}$$

注意上式中的$\mathbf{D}'$代表介质静止时的电位移矢量. 将上述方程带入动生麦克斯韦方程组, 且速度为某一定值$\mathbf{v}_0$时, 在$v_0<<c_0$的近似下忽略高次项, 得到[20]

$$\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho_f-\nabla\cdot\mathbf{P}_S+\varepsilon\nabla\cdot(\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}), \tag{15c}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{15d}$$

$$\nabla\times(\mathbf{E}-\mathbf{v}_0\times\mathbf{B})=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{15e}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\left(\mathbf{B}/\mu+\varepsilon\mathbf{v}_0\times\mathbf{E}\right)\\
&=\mathbf{J}_f+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)(\varepsilon\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}+\mathbf{P}_S)\\
&\cong\mathbf{J}_f+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{E}-\varepsilon\mathbf{v}_0\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\\
&\qquad+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{P}_S\\
&\cong\mathbf{J}_f+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}+\varepsilon\left[(\mathbf{v}_0\cdot\nabla)\mathbf{E}+\mathbf{v}_0\times\nabla\times\mathbf{E}\right]\\
&\qquad+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{P}_S\\
&=\mathbf{J}_f+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}+\varepsilon\nabla(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E})+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{P}_S,
\end{aligned} \tag{15f}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\left[\mathbf{B}/\mu+\mathrm{v}_0\times(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}_S)\right]\\
&=\mathbf{J}_f+\varepsilon\nabla(\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{E})+\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}+\mathbf{P}_S)\\
&\nabla\times\mathbf{B}=\mu\mathbf{J}_0+\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_S+\mu\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{v}_0\cdot\nabla\right)\mathbf{E}.
\end{aligned} \tag{15g}$$

上式即为包含本构关系的动生麦克斯韦方程组. 方程(15)在时域和频域中的具体解法可以参考文献[20].

6 相对论修正效应

本文推导的麦克斯韦方程组是洛伦兹变换的非相对论近似, 除了介质的运动速度是时间的函数外, 其他与赫兹方程等价. 如果考虑介质中的光速小于真空中的光速, 且工程技术中介质的运动速度很低, 赫兹方程在我们关心的应用领域不会产生超光速现象, 因此和光速不变原理没有矛盾. 如果需要做相对论效应修正, 当速度为常数$\mathbf{v}_0$时, 应该在$\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}$和$\mathbf{v}_0\times\mathbf{D}'$前面加上一个$\alpha$因子[20,41]:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}'=\rho_f, \tag{16a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0, \tag{16b}$$

$$\nabla\times[\mathbf{E}-\alpha\mathbf{v}_0\times\mathbf{B}]=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{16c}$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} + \alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \alpha \rho_{\mathrm{f}} \mathbf{v}_0 + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}', \tag{16d}$$

α因子表示介质在匀速运动时, 相对论效应所带来的修正[42]:

$$\alpha = 1 - \mu_0 \varepsilon_0 / \mu\varepsilon. \tag{16e}$$

相应地, 动生麦克斯韦格方程组变形为

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{S}} + \varepsilon\alpha \nabla \cdot (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}), \tag{17a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{17b}$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} - \alpha \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \tag{17c}$$

$$\nabla \times \left[\mathbf{B}/\mu + \alpha \mathrm{v}_0 \times (\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mathrm{S}})\right] = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \varepsilon\alpha \nabla (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{E}) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mathrm{S}}). \tag{17d}$$

注意, 在洛伦兹变换中, v/c_0中的光速一般认为是真空中的光速($c_0=(\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2}$), 以此推导出$\alpha$因子的表达式. 对于介质, 是否应该将$c_{\mathrm{m}}=(\mu\varepsilon)^{-1/2}$作为介质中的光速而应用到洛伦兹变换中? 我们不确定; 如果是, 则需要重新考虑此处添加α因子的表达式.

7 动生麦克斯韦方程组的求解方法

求解麦克斯韦方程组本质上是求解电磁场的问题. 电磁场理论实际上是研究静电荷和运动电荷产生的场的问题. 静磁场由静电荷或电荷的匀速运动产生; 电荷加速/减速运动或电流随时间变化导致时变场. 一般当我们知道源的分布时, 才进一步求解场的分布. 求解方法分为两大类: 第一种方法是通过位函数, 比如辅助标量势φ和磁矢量势$\mathbf{A}$等. 在研究电磁波的辐射、散射和传输问题时, 或自然条件下的电磁波传播问题中, 位函数得到了广泛的应用[43]. 因为在处理均匀同性介质中, 位函数的非齐次波动方程形式比较简单, 同时所需要求的位函数数目也较少. 第二类方法一般直接求解场方程. 两类方法本质上都需要求解一个齐次或非齐次的二阶线性偏微分方程.

求解非齐次二阶线性偏微分方程的方法也比较多, 常见的解析法有分离变量法、格林函数法和级数展开法等; 另外, 也可以用数值法进行求解[43]. 分离变量法的基本原理是寻找一种解, 这种解可以分解为多个函数的乘积, 且每一个函数只包含一个自变量; 一般用于笛卡儿坐标系、柱坐标系和圆坐标系下的偏微分方程的求解. 格林函数法也称为积分法, 它一般先求出单位点源所产生的场, 然后再乘以源分布, 并做源所在区域的积分而得到分布源的场. 格林函数是一种源函数, 它提供了处理偏微分方程中的激励项, 将非齐次问题转换为齐次问题; 换句话说, 格林函数构成了微分方程和积分方程之间的本质联系. 偏微分方程也可以用级数求解, 比如借助于正交函数级数求解. 当求解微分方程的变量是不可分离的或即便是可分离的, 但方程的边界条件不适合特别的解时, 也可以采用无穷级数进行求解. 对于动生麦克斯韦方程组, 由于方程组的复杂性和边界条件的特殊性, 无论对于时变场和时谐场, 我们均采用类似于微扰论中级数展开的方法求解方程组, 详细计算过程如下文所示.

7.1 时域空间

在时域空间中, 将方程组(11a)~(11d)按λ参数的顺序进行展开(λ=1), 则[19]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \lambda \mathbf{E}_1 + \lambda^2 \mathbf{E}_2 + \cdots, \tag{18a}$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}'_0 + \lambda \mathbf{D}'_1 + \lambda^2 \mathbf{D}'_2 + \cdots, \tag{18b}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{H}_1 + \lambda^2 \mathbf{H}_2 + \cdots, \tag{18c}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \lambda \mathbf{B}_1 + \lambda^2 \mathbf{B}_2 + \cdots, \tag{18d}$$

将上述式子再带入方程组(11a)~(11d), 合并同类项, 对于零级近似[19]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_0 = \rho_0, \tag{19a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \tag{19b}$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_0, \tag{19c}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}'_0, \tag{19d}$$

其中,

$$\rho_0 = \rho_{\mathrm{f}} - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mathrm{S}}, \tag{19e}$$

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_{\mathrm{f}} + \rho_{\mathrm{f}} \mathbf{v} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{\mathrm{S}}) + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_{\mathrm{S}}, \tag{19f}$$

方程(19a)~(19d)和经典麦克斯韦方程组的形式相同, 可以利用常见的方法求解, 如矢量势、赫兹矢量等.

对于一级近似, 则

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_1 = 0, \tag{20a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_1=0, \tag{20b}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1=\mathbf{F}_1-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_1, \tag{20c}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_1=\mathbf{J}_1+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D'}_1, \tag{20d}$$

其中,

$$\mathbf{F}_1=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0), \tag{20e}$$

$$\mathbf{J}_1=-\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{D'}_0). \tag{20f}$$

同样地, 我们得到

$$\nabla^2\mathbf{E}_1-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}_1=-\nabla\times\mathbf{F}_1+\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_1, \tag{21a}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_1-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}_1=-\nabla\times\mathbf{J}_1-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_1, \tag{21b}$$

方程(21a)~(21b)的特解为

$$\mathbf{E}_{1s}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\left[\nabla'\times\mathbf{F}_1(\mathbf{r'},t')-\mu\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{J}_1(\mathbf{r'},t')\right]\mathrm{d}\mathbf{r'}, \tag{22a}$$

$$\mathbf{H}_{1s}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\left[\nabla'\times\mathbf{J}_1(\mathbf{r'},t')+\mu\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{F}_1(\mathbf{r'},t')\right]\mathrm{d}\mathbf{r'}, \tag{22b}$$

其中, t'为推迟时间, 表达式为: $t'=t-\sqrt{\mu\varepsilon}\,|r-r'|$. 注意, 方程组的全解包含通解和特解, 并且要满足边界条件. 考虑推迟时间的计算可以用Jackson书中6.5节介绍的方法[44].

对于二级近似[19],

$$\nabla\cdot\mathbf{D'}_2=0, \tag{23a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_2=0, \tag{23b}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_2=\mathbf{F}_2-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}_2, \tag{23c}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_2=\mathbf{J}_2+\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D'}_2, \tag{23d}$$

其中,

$$\mathbf{F}_2=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B}_1), \tag{23e}$$

$$\mathbf{J}_2=-\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{D'}_1), \tag{23f}$$

使用同样的处理方法:

$$\nabla^2\mathbf{E}_2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}_2=-\nabla\times\mathbf{F}_2+\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}_2, \tag{24a}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_2-\mu\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}_2=-\nabla\times\mathbf{J}_2-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{F}_2, \tag{24b}$$

特解为

$$\mathbf{E}_{2s}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\left[\nabla'\times\mathbf{F}_2(\mathbf{r'},t')-\mu\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{J}_2(\mathbf{r'},t')\right]\mathrm{d}\mathbf{r'}, \tag{25a}$$

$$\mathbf{H}_{2s}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r'}|}\left[\nabla'\times\mathbf{J}_2(\mathbf{r'},t')+\mu\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{F}_2(\mathbf{r'},t')\right]\mathrm{d}\mathbf{r'}. \tag{25b}$$

公式(25a)和(25b)的进一步推导可以参考文献[44]的6.5节, 更高阶的计算可以采用类似方法求解.

7.2 频域空间

通常情况下, 介电常数是一个固定的常数; 但在不同频率时, 其大小发生变化. 为了探究频率的影响, 我们使用傅里叶变换和傅里叶反变换方法进行研究, 基本过程如下[19]:

$$a(\mathbf{r},\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t e^{\mathrm{i}\omega t}a(\mathbf{r},t), \tag{26a}$$

$$a(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega e^{-\mathrm{i}\omega t}a(\mathbf{r},\omega), \tag{26b}$$

引入频率空间的目的是为了简化$\mathbf{D}'$和$\mathbf{E}'$, 以及$\mathbf{H}$和$\mathbf{B}$之间的关系:

$$\mathbf{D'}(\mathbf{r},\omega)=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega), \tag{27a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},\omega)=\mu(\omega)\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega), \tag{27b}$$

注意, 我们此处不考虑介质运动带来的变化, 仍然使用经典的本构关系. 对方程(19)~(24)进行傅里叶变换, 结合微扰论, 我们可以得到

零级近似:

$$\nabla\cdot\mathbf{D'}_0(\mathbf{r},\omega)=\rho_0(\mathbf{r},\omega), \tag{28a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_0(\mathbf{r},\omega)=0, \tag{28b}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_0(\mathbf{r},\omega)=\mathrm{i}\omega\mathbf{B}_0(\mathbf{r},\omega), \tag{28c}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_0(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{J}_0(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{D'}_0(\mathbf{r},\omega), \tag{28d}$$

一级近似:

$$\nabla\cdot\mathbf{D'}_1(\mathbf{r},\omega)=0, \tag{29a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_1(\mathbf{r},\omega)=0, \tag{29b}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_1(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{F}_1(\mathbf{r},\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{B}_1(\mathbf{r},\omega), \tag{29c}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_1(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{J}_1(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{D'}_1(\mathbf{r},\omega). \tag{29d}$$

进一步推导如下方程:

$$\nabla^2\mathbf{E}_1(\mathbf{r},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E}_1(\mathbf{r},\omega)=-\nabla\times\mathbf{F}_1(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{J}_1(\mathbf{r},\omega),\tag{30a}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_1(\mathbf{r},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{H}_1(\mathbf{r},\omega)=-\nabla\times\mathbf{J}_1(\mathbf{r},\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{F}_1(\mathbf{r},\omega).\tag{30b}$$

如前所述, 全解由特解和通解两部分组成; 特解为

$$\mathbf{E}_{1s}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\exp\left[\mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\left[\nabla'\times\mathbf{F}_1(\mathbf{r}',\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{J}_1(\mathbf{r}',\omega)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}'\tag{31a}$$

$$\mathbf{H}_{1s}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\exp\left[\mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\left[\nabla'\times\mathbf{J}_1(\mathbf{r}',\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{F}_1(\mathbf{r}',\omega)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}.\tag{31b}$$

二级近似:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}'_2(\mathbf{r},\omega)=0,\tag{32a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}_2(\mathbf{r},\omega)=0,\tag{32b}$$

$$\nabla\times\mathbf{E}_2(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{F}_2(\mathbf{r},\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{B}_2(\mathbf{r},\omega),\tag{32c}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}_2(\mathbf{r},\omega)=\mathbf{J}_2(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{D}'_2(\mathbf{r},\omega).\tag{32d}$$

同样的方法:

$$\nabla^2\mathbf{E}_2(\mathbf{r},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E}_2(\mathbf{r},\omega)=-\nabla\times\mathbf{F}_2(\mathbf{r},\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{J}_2(\mathbf{r},\omega),\tag{33a}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}_2(\mathbf{r},\omega)+\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{H}_2(\mathbf{r},\omega)=-\nabla\times\mathbf{J}_2(\mathbf{r},\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{F}_2(\mathbf{r},\omega).\tag{33b}$$

特解为

$$\mathbf{E}_{2s}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\exp\left[\mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\left[\nabla'\times\mathbf{F}_2(\mathbf{r}',\omega)+\mathrm{i}\omega\mathbf{J}_2(\mathbf{r}',\omega)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}',\tag{34a}$$

$$\mathbf{H}_{2s}(\mathbf{r},\omega)=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\exp\left[\mathrm{i}\omega\sqrt{\mu\varepsilon}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\times\left[\nabla'\times\mathbf{J}_2(\mathbf{r}',\omega)-\mathrm{i}\omega\mathbf{F}_2(\mathbf{r}',\omega)\right]\mathrm{d}\mathbf{r}'.\tag{34b}$$

8 麦克斯韦方程在微观尺度下边界条件的扩展与工程应用

8.1 麦克斯韦方程在微观尺度下边界条件的扩展

麦克斯韦方程组(经典和动生)的成立是有条件的. 在涉及不同本构参数介质之间的边界处, 或者当存在面电荷密度或面电流密度时, 场矢量**E**, **D**, **B**, **H**满足不同的边界条件. 前面我们一方面比较详细地论述了当介质运动速度远小于光速, 相对论效应可以忽略时, 动生麦克斯韦方程组成立的边界条件. 另一方面, 当介质的几何结构尺寸减小至纳米尺度时, 非经典效应会愈加明显, 经典预测和实验观测之间的差异越来越大, 尤其是当特征尺寸在10~20 nm时[4]. 根本原因在于此时的电磁响应是材料微观尺度下处于原子与分子级的电子和原子核与电磁场的相互作用, 介质表面的激发电荷是非局域的, 在空间中分布不同. 因此, 界面就不是一个简单的数学上厚度为无穷小的理想面了. 经典电磁学缺乏描述这一分布范围内的相关理论, 所以麦克斯韦方程组在纳米尺度下的边界条件需要修正. Yang等人[4]最近提出的理论解决了这个问题, 该理论通过引入一组复杂的表面响应函数——材料界面内禀参数**d** (Feibelman **d**)——修正了经典边界条件, 从而将宏观电磁学的有效性扩展到纳米尺度范围.

参数d决定的非经典表面极化(界面处)可表示为

$$\mathbf{P}_S=\boldsymbol{\pi}+\mathrm{i}\omega^{-1}\mathbf{K},\tag{35a}$$

$$\boldsymbol{\pi}=\varepsilon_0\mathbf{d}_\perp[\![\mathbf{E}_\perp]\!]\hat{\mathbf{n}},\tag{35b}$$

$$\mathbf{K}=\mathrm{i}\omega\mathbf{d}_\parallel[\![\mathbf{D}_\parallel]\!],\tag{35c}$$

其中面外表面偶极子密度$\boldsymbol{\pi}$由$\mathbf{d}_\perp$决定, 表面电流密度**K**由$\mathbf{d}_\parallel$决定;$\mathbf{d}_\perp$和$\mathbf{d}_\parallel$分别代表离感应电荷密度的质心和面内电流密度导数的质心的距离, 且两者都与界面处的材料组成和外部施加电场的频ω有关. 此时, 麦克斯韦方程组的微观边界条件为[4]

$$[\![\mathbf{D}_\perp]\!]=\mathrm{i}\omega^{-1}\nabla_\parallel\cdot\mathbf{K}=\mathbf{d}_\parallel\nabla_\parallel\cdot[\![\mathbf{D}_\parallel]\!],\tag{36a}$$

$$[\![\mathbf{B}_\perp]\!]=0,\tag{36b}$$

$$[\![\mathbf{E}_\parallel]\!]=-\varepsilon_0^{-1}\nabla_\parallel\boldsymbol{\pi}=-\mathbf{d}_\perp\nabla_\parallel[\![\mathbf{E}_\perp]\!],\tag{36c}$$

$$[\![\mathbf{H}_\parallel]\!]=\mathbf{K}\times\hat{\mathbf{n}}=\mathrm{i}\omega\mathbf{d}_\parallel[\![\mathbf{D}_\parallel]\!]\times\hat{\mathbf{n}},\tag{36d}$$

即通过内禀参数**d**对经典电磁学的边界条件进行了修正. 当$\mathbf{d}_\perp$和$\mathbf{d}_\parallel$减小到0时, 上述微观边界条件变为描述电磁现象的宏观边界条件, 此时意味着界面处没有偶极子或表面电流.

8.2 麦克斯韦方程与集总电路抽象

麦克斯韦方程组是用来研究电磁场和电磁波演化

规律的主要手段, 其在工程中的直接应用比较抽象. 麦克斯韦方程在工程学科中的典型应用是电气工程; 或者说, 为了在实际中应用电磁现象, 电气工程在麦克斯韦方程之上创建了一个新的抽象层, 即集总电路抽象[45]. 通过有目的的处理和利用集总电路抽象层, 将物理定律和电气工程连接起来. 换句话说, 电路理论是比电磁理论更加抽象的理论, 前者主要描述电磁现象的工程应用, 后者描述电磁规律的变化. 在这过程中, 抽象方法和过程发挥了关键作用, 使我们可以完成物理学到工程的转换, 进而构建更加复杂的系统.

从科学转换到工程的抽象过程来自于离散化原则, 该原则是一种自我强加的约束, 离散化也称为集总化. 集总原则说明, 我们处理的是离散元件或范围, 并为每个离散元件或范围指定单值. 当然, 该原则要求建立的抽象系统需要在适当的约束内进行, 这样才能保持单值的假设. 集总电路抽象是用理想导线连接一系列满足集总事物原则的集总元件而构成一个具有特定功能的集合. 集总参数元件具有唯一定义的接线端电压和接线端电流. 对于处于静止的闭合电路系统, 集总参数元件一般被施加三条约束, 需要满足的集总事物原则为[45]:

(1) 在稳态下元件的边界选择应该满足任何时刻经过元件外的任何闭环路径有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_B}{\partial t}=0, \tag{37a}$$

其中$\boldsymbol{\Phi}_B$是通过积分路径所包围的面积的磁通量. 由于假设任何时刻磁通的变化率为0, 且因任何磁通的建立都要求磁通量的变化率非零, 所以磁通量一定为零.

(2) 在稳态下元件的边界选择应该满足元件内部总电荷变化率为零, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=0, \tag{37b}$$

换句话说, 当元件内部不存在总时变电荷时, 可以定义一个流过元件的有意义的电流.

(3) 电磁波在元件内部传输时的时间延迟要远小于元件中信号的时间变化周期.

电路是由理想导线连接起来的集总参数元件的集合, 两个或两个以上的集总元件接线端的连接点称为节点. 因为电路中任意两点间的电压和流过导线的电流是有定义的, 则电路的任一部分也遵循类似于集总元件的约束. 集总电路的集总事物原则包括下列约束[45]:

(1) 与电路任何部分有关的磁通量变化率在任何时刻必须为零(恒定磁场);

(2) 电路中任何节点处的总电荷变化率在任何时刻必须为零;

(3) 信号的时间尺度必须比通过电路的电磁波的传播延时大得多.

注意, 前两个约束由集总元件约束直接导出; 最后一个对信号的时间尺度施加了更强的限制, 因为一个电路可能有比单个元件大得多的物理尺度.

根据集总事物原则利用麦克斯韦方程组推导基尔霍夫定律. 对于处于静止状态的线路系统, 法拉第电磁感应定律和电荷守恒定律如下:

$$\int_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{L}=-\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}, \tag{38a}$$

(法拉第电磁感应定律)

$$\int_C \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=-\frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{38b}$$

(电荷守恒定律)

根据前面给出的集总事物原则对电路的约束条件式(37)可知, 对于闭合回路, 可以得到

$$\int_C \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{L}=0, \tag{39a}$$

$$\int_C \mathbf{J}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}=0. \tag{39b}$$

第一个式子说明, 电场沿一闭合回路的线积分一定等于零; 第二个式子表明电流在任一闭合面的面积分为零. 应用于电路, 电路中任一闭合路径电压的代数和为零, 此即基尔霍夫电压定律. 另外, 流出任一节点的电流等于流入节点的电流, 即流进任一节点电流的代数和为零. 当然, 结合麦克斯韦方程组和集总元件的集总事物原则, 我们很容易推导出材料电阻的一般表达式; 由于较易, 此处不再给出详细过程.

摩擦纳米发电机等效电路与基本设计原则分析. 摩擦纳米发电机器件本身满足元件的集总事物原则–即三个基本约束, 故摩擦纳米发电机可以抽象为一个电压源和一个可变电容的串联形式, 或者根据诺顿定律等效为一个电流源和一个可变电阻的并联形式. 纳米发电机和其他元件连接而成的电路满足集总电路的原则, 故我们可以用集总电路抽象研究由纳米发电机

构成的更为复杂的能源转换系统. 需要特别注意两个方面: (1) 由于摩擦纳米发电机的电压和电流关系为微分关系, 所以在电路中是一个动态元件, 组成的电路为动态电路; (2) 摩擦纳米发电机的典型特点是在外界的机械激励下, 可以将机械能转换为电能, 则可以归属为有源二端元件. 对于摩擦纳米发电机而言, 即使在机械触发的频率高达MHz~GHz时, 只要单个纳米发电机的实际尺寸远小于300~0.3 m, 基于伽利略时空观的动生麦克斯韦方程组都可以安全使用.

9 关于洛伦兹变换的考虑

洛伦兹变换是反映相对论时空观的关于空间时间的变换表达式, 主要用来描述同一事件在两个不同惯性坐标系中观察的时空坐标之间的关系. 洛伦兹变换的推导是先利用单向光速不变假设定义同时性(本质上是为了对钟), 即定义了惯性系中的时间坐标, 然后推导出洛伦兹变换和时空间隔的洛伦兹变换[46].

我们熟悉的洛伦兹变换中的光速指的是真空中的光速(图5(a)). 对于浩瀚宇宙的空间而言, 星球可以近似为“几何点”, 并且不需要考虑它们的大小和形状, 这个空间体系中的电磁波现象必须用洛伦兹变换进行处理. 然而, 我们考虑另外一种情况. 假设宇宙中充满介质A(真空被介质A取代, 如图5(b)和(d)), 那么在这个空间里洛伦兹变换中的光速应该是A介质中的光速c_{m}:

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}, \tag{40a}$$

其中, n是介质A的折射率, ε代表相对介电常数, 其表达式为

$$n = \frac{\mu\varepsilon}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}. \tag{40b}$$

更进一步, 如果填充的A介质中混有其他不同形状和大小的B与C介质, 对于这样一种混合或者复合介质结构, 洛伦兹变换中的光速是什么? 这个问题值得研究. 对于地球上的电磁现象, 相对于人们所关心的空间范围内, 介质都是有形状和大小的, 而且它们不能近似为“几何点”或“点电荷的集成”; 利用洛伦兹变换处理相应的电磁现象会遇到同样的问题: 这里的光速是什么? 庆幸的是, 对于我们关心的地球上的宏观物体的电磁现象, 由于宏观物体的运动速度远远小于光速, 在发生电磁现象的时间间隔内, 光所传播的距离远远大于发生电磁现象的空间范围的尺寸, 此时可以不考虑相对论效应, 运用伽利略时空观下的处理方法即可[39,40]. 因此, 动生麦克斯韦方程组提供了一个有效的、实用的处理地球上具有加速运动介质的电磁现象的方法.

当然, 如果填充的是非线性介质, 问题则更为复杂. 我们把上述情况作为开放性问题, 请大家思考.

10 总结

(1) 狭义相对论成立的前提条件是至少存在一个惯性系; 通过洛伦兹变换, 可以推导研究其他惯性系(理论上有很多)中的电磁现象, 无需进行低速限制. 然而, 当介质在非惯性系中做复杂运动时, 特别是运动速度为时间的函数时, 虽然经过瞬时坐标变换理论上可以计算电磁场的变化, 但在数学计算和工程应用中过于复杂, 难以实现. 对于地球上运动的宏观物体, 10倍的音速仅为3.4 km/s, 由此引起的狭义相对论效应非常小, 我们认为可以忽略.

(2) 在1905年之前, 大家已逐渐意识到麦克斯韦方程组在伽利略坐标变换下不能严格保持形式不变, 但伽利略绝对时空观在很多情况下可以得到非常好的近似结果. 到现在为止, 有两种处理方法. 第一种是利用伽利略电磁学[39,40], 将t时刻空间中场的分布看作是准静态的, 即将此时刻的场进行“冻结”[44]. 在准静态情况下, 介质位置和场的分布可以逐“帧”处理. 特别是当本构关系预先设定时, 运动介质系统的电磁场在低速下比较容易求得. 对于磁极限或者电极限, 可以进行更多的近似[39]; 介质沿直线做匀速运动时的理论很容易验证, 该理论是否适用于复杂的运动轨迹需要进一步探索, 因为此时没有充分考虑介质的动力学过程, 相对论效应也已被忽略. 当然, 我们不是特别确定静止介质中的本构关系是否同样适用于非惯性系. 第二种方法是结合动生麦克斯韦方程组, 来解决机械驱动的低速运动介质系统中电磁场随时间的演化规律. 对于在非惯性系中做复杂运动的介质, 当其速度较小、且忽略相对论效应时, 我们可以使用构建的方程组探究力-电-磁多场耦合系统的电磁场变化. 需要注意, 由于外界机械能的输入, 并且基于伽利略时空观, 动生麦克斯韦方程组不一定保持洛伦兹协变性. 因此, 即使运

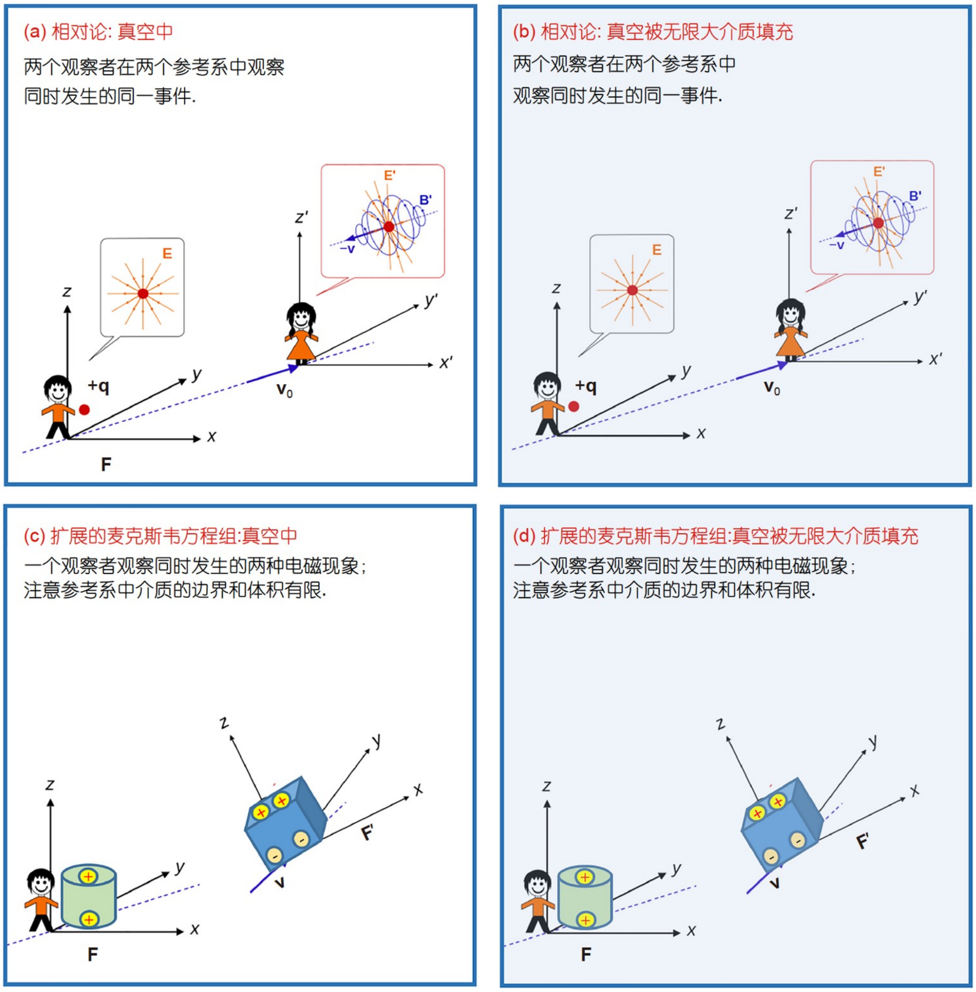

图 5 关于洛伦兹变换的讨论: 洛伦兹变换表达式和动生麦克斯韦方程组在两种不同条件下的变形及其适用范围. (a), (c) 为真空状态; (b), (d) 真空被某种介质填充的状态

Figure 5 Lorentz transformations at various cases; different forms of Lorentz transformation and expanded Maxwell's equations within vacuum ((a), and (c)), and other filled medium ((b), and (d)).

动速度为恒速$\mathbf{v}_0$, 动生麦克斯韦方程组也不能经过变形后与经典麦克斯韦方程组具有相同的形式, 除非$\mathbf{v}_0$=0.

(3) 在实验室坐标系内, 考虑由多个运动介质组成的复杂系统, 比如不同的介质沿着各自不同的轨迹做变速运动. 如图6所示, 观察者在实验室系观测同时发生的多个电磁现象. 此时, 可以用动生麦克斯韦方程组对介质内部电磁场的分布和大小的演化规律处进行近似求解处理. 我们不必担心超光速问题, 因为介质中的光速c_m总是小于c_0. 一旦电磁波产生, 其在介质之间的传播规律用经典的麦克斯韦方程组描述, 满足光速不变原理; 两组方程的解在介质边界处相遇并满足边界条件. 实际上, 无论介质运动与否, 真空中传播的光速都保持不变. 总之, 本文通过对动生麦克斯韦方程组的构建背景、物理图像、与经典方程组之间的区别和联系、求解方法等的详细阐述, 目的之一是为了强调动生麦克斯韦方程组在工程技术方面的潜在应用. 当年, 麦克斯韦将位移电流引入到安培定理中, 将安培定理扩展到时变情形, 进而认识到光的电磁特性, 发展出系统的电磁学理论. 另一方面, 麦克斯韦方程组深刻地反映了几何构象与物理直觉之间的关联, 体现这种关联的标志便是场论的基础 ——能量在场中存储. 通俗地讲, 能量不仅存在于介电体和磁体中, 也分布在他们周围空间的电场和磁场中. 动生麦克斯韦方程组中

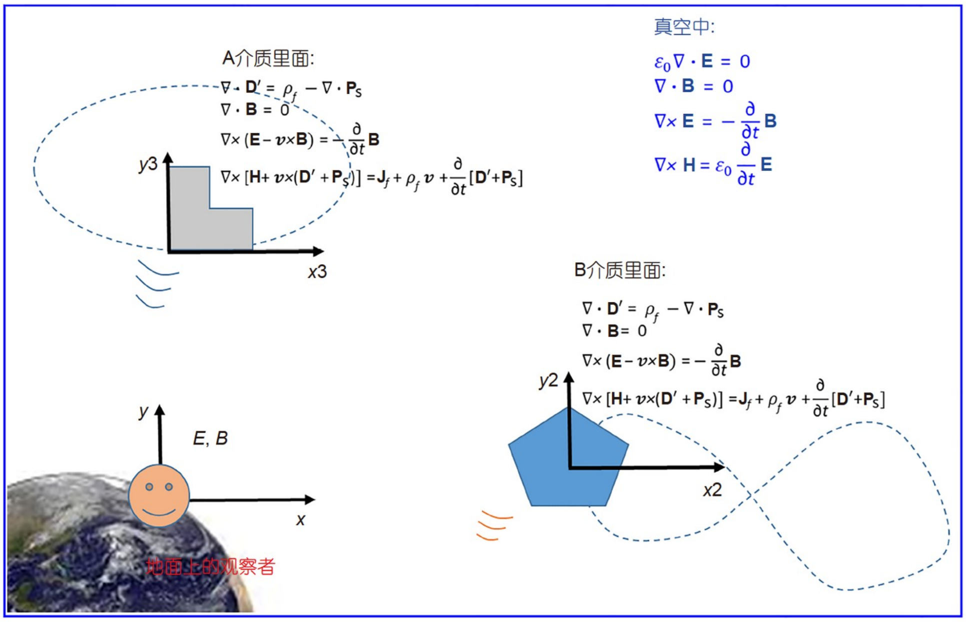

图 6 描述介质中电磁现象的动生麦克斯韦方程组与电磁波在空间辐射时的经典麦克斯韦方程组, 两者分“区域”管理, 平行应用, 界面耦合, 不矛盾, 更不存在超光速的问题[19,21].

Figure 6 Conjunction of the Maxwell’s equations for a mechano-driven system and the standard Maxwell’s equations as the media are moving along the dashed trajectories, and the observation is done on earth (in Lab frame). For the space inside each media, the governing equations are the Maxwell’s equations for a mechano-driven system; and once the electromagnetic wave is generated, its traveling outside of the media is governed by the Maxwell’s equations for vacuum, which means the speed of light remains constant regardless the media is moving or not [19,21].

引入的动生极化项$\mathbf{P}_\mathrm{S}$, 将力-电-磁场互相耦合起来, 其对科学理论和工程技术的实际影响和作用等待我们去探索; 比如, 我们之前提出用构建的动生麦克斯韦方程组来研究带电液体、磁流体介质系统的动力学问题的设想[20].

从一个偶然发现的现象开始, 到精心设计实验进行验证, 经过不断探索, 最终构建出一个完整的理论体系. 再从基础理论出发, 预言新现象, 发现新未知, 探索更多自然界运行的规律, 推动科学技术不断前进. 我们以电磁理论的发明为例, 自从1831年法拉第发明电磁感应定律, 1834年楞次提出楞次定律, 把电磁感应现象数学化, 到1861年麦克斯韦提出系统的电磁理论和位移电流的假设, 再到1888年赫兹首次观察到电磁波, 这些说明了科学发展从一个实验现象出发而推断出的宏大理论体系, 并预言了很多技术上的应用. 毫无疑问, 在科学的演进中, 对实验现象和物理规律的深刻阐释会不断增加新知识, 丰富学科体系, 扩展人类的未知边界. 我们的目的是为解决地球上人类生存所面临的重大问题, 例如能源、环境和健康等提供思路, 而不是统一宇宙间的四种基本力(强相互作用、弱相互作用、引力相互作用和电磁相互作用). 纵观整个科学发展史, 任何事物的发展都无疑夹杂着曲解与理解、失望与希望、现在与未来等. 因此, 如何沟通交流显得极为重要, 如迪安所说: 以合适的方式让大家了解科学技术的伟大、科学技术的危险和科学技术面临的前景[47]是非常重要的.

致谢 感谢杨金民教授、王飞教授、王群教授和李田军教授的热情讨论!

参考文献

1 Reid J S, Wang C H T, Thompson J M T. James Clerk Maxwell 150 years on. Phil Trans R Soc A, 2008, 366: 1651–1659

2 Sengupta D L, Sarkar T K. Maxwell, Hertz, the Maxwellians, and the early history of electromagnetic waves. IEEE Antennas Propag Mag, 2003, 45: 13–19
3 Richard S W. The Construction of Morden Science. Zhang B T, trans. Beijing: The Commercial Press, 2020 [理查德·韦斯特福尔, 著, 张卜天译. 近代科学的构建. 北京: 商务印书馆, 2020]
4 Yang Y, Zhu D, Yan W, et al. A general theoretical and experimental framework for nanoscale electromagnetism. Nature, 2019, 576: 248–252
5 Bucci O M. From electromagnetism to the electromagnetic field: The genesis of Maxwell's equations. IEEE Antennas Propag Mag, 2014, 56: 299–307
6 Oliver H. Electromagnetic induction and its propagation (second half.). Electrical Papers, 1892, 2: 39–155.
7 Oliver H. On the electromagnetic effects due to the motion of electrification through a dielectric. Electrical Papers, 1892, 2: 504–518.
8 Graham Hall. Maxwell's electromagnetic theory and special relativity. Phil Trans R Soc A, 366: 1849–1860
9 James C R. The long road to Maxwell's equations-How four enthusiasts helped bring the theory of electromagnetism to light. IEEE Spectrum, 2014, 51: 36–56
10 Salvo D A. A History of the Ideas of Theoretical Physics-Essays on the Nineteenth and Twentieth Century Physics. The Netherlands: Kluwer Academic, 2001
11 Hertz H. Histories of the electron: The Birth of Microphysics. In: Buchwald J Z, Warwick A, eds. Jones D E, trans. Electric Waves. New York: Dover Publications Inc., 1962
12 Buchwald J Z, Warwick A. Histories of the Electron: The Birth of Microphysics. Cambridge: MIT Press, 2001
13 Whittaker E T. A History of the Theories of Aether and Electricity. London: Thomas Nelson and Sons Ltd., 1951
14 Ampère A. Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l′expérience (in French). Philosophy. 1958. Corpus ID: 161826422
15 Aversa A. Ampère's Force Law: A Modern Introduction. Scottsdale, United States: Springer, 2018. 1–92
16 Faraday M. Experimental Researches in Electricity. London: Richard and John Edward Taylor, 1839
17 Lenz E. Ueber die Bestimmung der Richtung der durch elektodynamische Vertheilung erregten galvanischen Ströme. Annalen der Physik, 2006, 107: 483–494
18 Magie W F. Source Books in the History of the Sciences. New York and London: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1935
19 Wang Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system—General theory, mathematical solutions and applications in TENG. Mater Today, 2022, 52: 348–363
20 Wang Z L. Maxwell's equations for a mechano-driven, shape-deformable, charged media system, slowly moving at an arbitrary velocity field v(r, t). arXiv: 2202.13768
21 Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed motion media system under slow motion and nonrelativistic approximations (in Chinese). Sci Sin-Tech, 2022, 52: 1198–1211 [王中林, 邵佳佳. 非匀速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组——低速与非相对论近似. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1198–1211]
22 Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field. Phil Trans R Soc Lond, 1865, 155: 459
23 Hertz H. On the fundamental equaitons of electromagnetics for bodies in motion. Wiedemann's Annalen, 1890, 41: 369
24 Minkowski H. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Math Ann, 1910, 68: 472–525
25 Gluckman A. G. On electrodynamic processes of electrified bodies in motion. J Washington Acad Sci, 2002, 88: 27
26 Darrigol O. Emil Cohn's electrodynamics of moving bodies. Am J Phys, 1995, 63: 908–915
27 Rozov A L. Modelling of electrodynamic phenomena in slowly moving media. Z für Naturforschung A, 2017, 72: 757–762
28 Tai C T. A study of electrodynamics of moving media. Proc IEEE, 1964, 52: 685–689
29 Costen R C, Adamson D. Three-dimensional derivation of the electrodynamic jump conditions and momentum-energy laws at a moving boundary. Proc IEEE, 1965, 53: 1181–1196
30 Wang Z L. From contact electrification to triboelectric nanogenerators. Rep Prog Phys, 2021, 84: 096502
31 Wang Z L. On the first principle theory of nanogenerators from Maxwell's equations. Nano Energy, 2020, 68: 104272
32 Shao J, Willatzen M, Wang Z L. Theoretical modeling of triboelectric nanogenerators (TENGs). J Appl Phys, 2020, 128: 111101
33 Cao X, Zhang M, Huang J, et al. Inductor-free wireless energy delivery via maxwell's displacement current from an electrodeless triboelectric nanogenerator. Adv Mater, 2018, 30: 6

34 Chen C, Wen Z, Shi J, et al. Micro triboelectric ultrasonic device for acoustic energy transfer and signal communication. Nat Commun, 2020, 11: 4143

35 Wang H, Wang J, Yao K, et al. A paradigm shift fully self-powered long-distance wireless sensing solution enabled by discharge-induced displacement current. Sci Adv, 2021, 7: eabi6751

36 Thakkar V. Faraday's law in moving media. Master Thesis. Odisha, India: National Institute of Science Education and Research, 2015. 1–11

37 Kaufman A N. Maxwell equations in nonuniformly moving media. Ann Phys, 1962, 18: 264–273

38 Pauli W. Relativity Theory. Ling H D, Zhou W S, trans. Beijing: Higher Education Press, 2020 [W. 泡利, 著. 凌德洪, 周万生, 译. 相对论. 北京: 高等教育出版社, 2020]

39 Le Bellac M, Lévy-Leblond J M. Galilean electromagnetism. Nuovo Cim B, 1973, 14: 217–234

40 Rousseaux G. Foury years of galilean electromagnetism (1973–2013). Eur Phys J, 2013, 128: 81

41 Rozov A. Maxwell equations for slow-moving media. Z für Naturforschung A, 2015, 70: 1019–1024

42 Wang F, Yang J M. Relativistic origin of Hertz and extended Hertz equations for Maxwell theory of electromagnetism. arXiv: 2201.10856

43 Elsherbeni A, Demir V. The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulation. Yu Z Y, trans. Beijing: National Defence Industry Press, 2012 [Elsherbeni A, Demir V, 著. 喻志远, 译. MATLAB模拟的电磁学时域有限差分法. 北京: 国防工业出版社, 2012

44 Jackson J D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. Hoboken John Wiley & Sons, 1999. 238

45 Agarwal A, Lang H. Foundations of Analog and Digital Electronic Circuits. Yu Q J, Zhu G P, Liu X C, trans. Beijing: Tsinghua University Press, 2008 [Agarwal A, Lang H. 著. 于歆杰, 朱桂萍, 刘秀成, 译. 模拟和数字电子电路基础. 北京: 清华大学出版社, 2008]

46 Zhang Y Z. A key step in the development of the special relativity by Einstein-definition of simultaneity. Physics and Engineering, 2015, 4: 3–8 [张元仲. 爱因斯坦建立狭义相对论的关键一步-同时性定义. 物理与工程, 2015, 4: 3–8]

47 Cornelia D. A Scientist's Guide to Talking to the Public. Zhang H L, trans. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2018 [科妮莉亚·迪安. 张会亮, 译. 科学家与公众沟通指南. 上海: 上海交通大学出版社, 2018]

Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed-motion media system for engineering electrodynamics and their solutions

WANG ZhongLin[1,2,3] & SHAO JiaJia[1,2]

[1] *Beijing Institute of Nanoenergy and Nanosystems, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101400, China;*
[2] *School of Nanoscience and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*
[3] *School of Materials Science and Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332-0245, USA*

Beginning from the integral forms of the four physics laws, we derive Maxwell's equations for a mechano-driven, slow, nonuniform moving speed media system based on Galilean space and time, thus presenting a new approach for solving the electromagnetic field problems in a moving system with acceleration. For the electromagnetism of macro-objects on Earth, we believe that the relativistic effect can be generally ignored. Different from the classical texts on electrodynamics, which assumes motion is a constant speed along a straight line in the inertial frame, our theory describes the electromagnetism of the media systems in the noninertial frame with acceleration and time-dependent volume, shape, and boundary. Most importantly, the expanded Maxwell's equations are solved through mathematical means. Our objective is to study the dynamics of coupling among the mechano-electric-magnetic multifields. Lastly, the expansion of the boundary conditions at the nanoscale boundaries and the application of the Maxwell's equations in a lumped circuit system are discussed.

Maxwell's equations for a mechano-driven system, non-inertia medium movement, mechano-driven polarization, engineering electrodynamics, Galilean transformation, Lorentz transformation, special relativity

doi: 10.1360/SST-2022-0226