



非匀速运动物体系统的动生麦克斯韦方程组理论

王中林^{1,2,3*}, 邵佳佳^{1,2}

1. 中国科学院北京纳米能源与系统研究所, 北京 101400;

2. 中国科学院大学纳米科学与技术学院, 北京 100049;

3. 佐治亚理工学院材料科学与工程学院, 亚特兰大 30332-0245, 美国

*E-mail: zlwang@gatech.edu

收稿日期: 2023-02-14; 接受日期: 2023-03-28; 网络版发表日期: 2023-04-21

摘要 从实际工程应用角度出发, 我们构建了非匀速运动介质(物体)系统中的动生麦克斯韦方程组(Maxwell's equations for a mechano-driven media system), 拟解决在非惯性系中低速变速运动介质以及介质形状和边界随时间/空间变化时电磁场的动力学演化规律. 本文概括总结了动生麦克斯韦方程组理论的核心内容, 包括方程组的构建背景、物理图像、基本特点、与经典方程组之间的区别和联系、求解方法、潜在应用范围等. 深入探讨了动生麦克斯韦方程组和经典麦克斯韦方程组之间的四个主要区别, 并提出近场电动力学与远场电动力学的基本概念. 最后, 对动生麦克斯韦方程组在科学和技术方面的潜在影响进行分析和展望.

关键词 动生麦克斯韦方程组, 动生极化, 位移电流, 非惯性系, 法拉第电磁感应定律, “反通量法则”

1 引言

1.1 经典麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程组在电磁理论中占有非常重要的地位, 影响着现代科学技术的各个方面, 比如广播、电视、雷达、无线网络等, 为研究电学、磁学、光学和现代场论提供了坚实的理论基础^[1-4]. 经典麦克斯韦方程组是麦克斯韦在总结前人发现实验定律基础上经过推广而建立的, 而且经历了长时间的发展^[5,6]. 这些最基本的实验定律包括: 库仑定律、安培与毕奥-萨伐尔定律、法拉第电磁感应定律、电荷守恒定律和洛伦兹方程, 它们分别揭示了电场、磁场的变化规律. 麦克斯韦方程组几乎以完美的数学形式对电磁场动力学演化

规律进行了高度概括和总结, 深刻反映出电磁场运动规律的本质和全部特性^[7,8]. 麦克斯韦方程组主要揭示了在给定场源(电荷密度 ρ 和电流密度 $\mathbf{J}$)的情况下电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{B}$ 随时间变化时所遵循的规律, 或者说揭示场源如何影响电磁场的变化. 它的微分形式反映了空间中某点的场与源的时空演化关系, 适用于介质的物理性质不发生突变的点; 积分形式表示在任一闭合曲线或闭合曲面内场与源的时空变化过程. 经典麦克斯韦方程组的微分形式为

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (1c)$$

引用格式: 王中林, 邵佳佳. 非匀速运动物体系统的动生麦克斯韦方程组理论. 中国科学: 技术科学, 2023, 53

Wang Z L, Shao J J. Theory of Maxwell's equations for a mechano-driven media system for a non-inertia medium movement system (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53, doi: 10.1360/SST-2023-0062

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'. \quad (1d)$$

该方程组成立的假设是在惯性系中、介质处于静止状态, 它用来描述体积固定、边界不变、处于惯性系中介质的电磁场变化行为, 揭示电场、磁场和电磁场之间的相互作用以及电磁场的传播规律, 没有直接考虑系统中其他外力(机械力)做功或介质(物体)有加速运动的情况. 但是, 这些隐含条件在一般的教科书或文献资料中鲜有提及, 易造成学生或科研人员的误解, 即认为经典麦克斯韦方程组是普适的、绝对的、适用于任何运动介质(物体)的情况. 这样的认识在处理有些工程技术问题时可能会出现偏差, 因此需要相应的拓展.

1.2 匀速直线运动介质的电磁场理论: 狭义相对论

爱因斯坦建立的狭义相对论与麦克斯韦电磁理论紧密联系, 真空和介质中的麦克斯韦方程组均可以写成满足狭义相对论要求的四维形式(洛伦兹协变)^[9,10]. 闵可夫斯基于1908年提出结合狭义相对论和洛伦兹变换阐述运动物体的电磁场演化规律^[11,12]. 虽然对于在惯性系中做匀速直线运动的物体(只有一种), 运用洛伦兹变换或者闵可夫斯基(闵氏)的方法求解麦克斯韦方程组即可得到运动参考系中电磁场的动力学行为, 但是正如爱因斯坦所说, 狭义相对论不适用于变速运动(如旋转运动)(图1).

狭义相对论的核心是洛伦兹变换, 对于真空中的电磁现象, 通过该变换, 匀速运动坐标系中的电磁场($\mathbf{E}', \mathbf{B}'$)可以直接和实验室坐标系中的电磁场($\mathbf{E}, \mathbf{B}$)结合协变的麦克斯韦方程组进行如下坐标转换而联系起来:

$$x' = \gamma(x - v_0 t), \quad (2a)$$

$$y' = y, \quad (2b)$$

$$z' = z, \quad (2c)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right), \quad (2d)$$

其中 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v_0}{c}$, c 是光在真空中的速度. 因此, 利用洛伦兹变换可以直接得到真空中点电荷运动所产生的电磁场, 例如加速器等. 尽管电荷运动有加速度, 但作为一个运动的质点电荷不需要考虑边界条件, 它

可以用一个delta函数来代替所产生的瞬时电流, 进而用经典的李纳-威谢尔势得到电磁场的分布. 这种近似在描述宇宙间的电磁现象时非常有效, 因为星球的大小相对于浩瀚的宇宙空间来说可以当作质点处理. 然而, 对于地球上工程技术中面对的几何形状(大小或尺寸)不可忽略的运动物体, 情况较为复杂, 就不能用李纳-威谢尔势方法来简单处理. 虽然介质和真空中的光速可以分别清晰地给出, 然而对于在不同介质和真空填充的空间中, 洛伦兹变换中的 c 应该取什么值? 这个问题很少有人讨论(图1(c)). 基于洛伦兹变换所发展的场论等在真空中是协变的, 如果同时考虑空间中的大小和边界不可忽略的运动介质, 方程组还是协变的吗? 这些理论可能还需要进一步讨论. 特别是对于各向异性的介质组成的运动物体, 其体内光速也是各向异性(例如旋光效应), 在这种情况下, 存在简单的洛伦兹变换吗? 麦克斯韦方程组的协变性也不一定成立, 答案还要进一步研究.

1.3 运动介质的电磁场理论: 伽利略电磁学

事实上, 在狭义相对论和闵氏方法提出之后, 很少有研究人员持续关注运动质(物体)系统电磁场的变化行为, 一般读者都误认为狭义相对论可以解决一切运动介质的电动力学问题. 伽利略电磁学的概念是LBLL (Le Bellac and Levy-Leblond)等人于1973年提出, 它不能替代相对论电磁学, 而是运用低速近似的方法处理经典电磁学中的问题^[13~15]. 结合经典麦克斯韦方程组, 通过伽利略变换和已知介质的本构关系, 将匀速运动物体做瞬时准静态近似处理(instantaneous quasi-static approximation), 进而揭示电极限(electric limit, 对应于静电学)和磁极限(magnetic limit, 对应于静电学)条件下匀速运动介质系统的电磁场^[13~15].

1.4 为什么要拓展麦克斯韦方程组?

在工程技术中, 当介质的形状、边界和体积是时间的函数, 且介质以任意速度 $\mathbf{v}(r, t)$ 沿不同轨迹运动时, 精确分析这些系统的电磁场动力学行为无疑相当复杂. 另外, 若系统中存在多个非匀速运动的介质, 介质的运动轨迹复杂多变, 包含周期性转动、曲线运动、振动等, 以洛伦兹变换为基础的闵氏方法不能使用. 因此, 从理论上, 对于处在非惯性系、非匀速运动的一个或多个运动介质的电磁场动力学问题, 通过拓

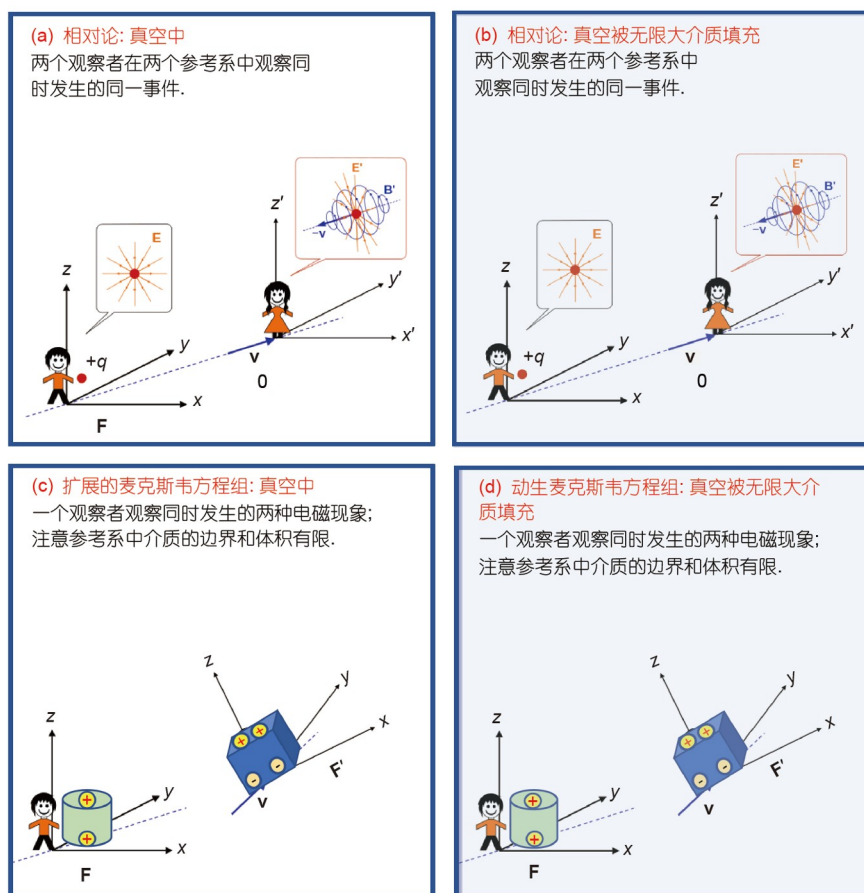


图1 关于洛伦兹变换的讨论: 基于洛伦兹变换的狭义相对论和动生麦克斯韦方程组在处理运动系统中电磁现象的区别((a), (c))和应用范畴((b), (d))的比较^[19]

Figure 1 Lorentz transformations in various cases: Different forms of Lorentz transformation and expanded Maxwell's equations within vacuum ((a), (c)), and other filled medium ((b), (d)) ^[19].

展经典麦克斯韦方程组, 以寻找更加适合的处理方法. 为解决这些问题, 我们构建了动生麦克斯韦方程组 (Maxwell's equations for a mechano-driven media system (MEs-f-MDMS))^[16-21].

另外, 近年来摩擦纳米发电机(triboelectric nano-generator, TENG)的实验现象重新引起大家对运动介质系统电磁场的兴趣. 2012年, 王中林教授研究小组^[22]首次发明了摩擦纳米发电机. 该新型发电机通过耦合接触起电效应和静电感应效应, 将外界输入的机械能转化为电能/电信号, 在实际工程中具有广阔的应用前景^[23,24]. 它的基本工作原理是在外界机械激励下, 介质进行非匀速运动, 接触面间产生的摩擦电荷和电极表面分布的感应电荷引起的总电场导致介质极化; 电场和介质极化强度随着时间/空间位置的变化而变

化, 继而在TENG内部产生位移电流, 同时在外电路输出传导电流^[23-25]. 通常情况下, 介质的相对运动速度较小, TENG的工作频率比较低, 系统产生的电磁辐射可以忽略. 若TENG在高频下工作, 比如旋转式TENG, 当转子高速旋转时, 距离TENG十几厘米处的金属棒可以探测到变化的电场, 并在无线状态下为多个LED供电^[26]. 通过MEMS技术, 设计的微型TENG的工作频率高达兆赫兹水平, 实验证明其具有调制入射信号进行射频通信的能力^[27]. 由于摩擦层(介电体)的非匀速(加速/减速)运动, 其边界、几何形状随着时间和空间位置的变化而变化, 经典麦克斯韦方程组无法精确处理该系统的电磁场变化行为. 上述现象不但涉及如何理解非惯性系中运动介质的电磁场变化规律问题, 同时引出探索利用高频机械运动驱动电磁辐射进行无线

信号传输的可能性. 所以, 如何拓展麦克斯韦方程组是我们目前研究的重点.

从理论角度来看, 对于一个闭环的线路, 我们知道法拉第电磁感应定律可以用磁通量的变化率的形式表现出来, 即楞次定律, 这叫做磁通量法则. 麦克斯韦方程组的第三个方程即法拉第电磁感应定律是根据磁通量法则而得到; 虽然在费曼的物理学讲义中详举了一些“反磁通量法则”的实验例子^[28], 但相关的解释比较含糊. 所以, 这些“反磁通量法则”的情况没有完全被包括在麦克斯韦方程组中. 在这种情况下, 如何从理论角度全面考虑所有情形则变得非常有必要.

在实际工程中, 大多数介质进行加速运动, 如圆周运动和振荡等, 且在非惯性系中的运动介质必然需要外力驱动. 广义相对论解决方法对于工程应用于复杂和困难. 严格来说, 宇宙中没有绝对的惯性参照系, 因为绝大部分物体都在做变速运动. 为了深入研究加速运动介质系统电磁场的动力学变化规律, 如介质的形状、体积和边界随着时间发生变化, 介质的运动速度是时间和空间的函数(速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 等), 我们构建了动生麦克斯韦方程组. 方程组成立的基本条件是介质运动速度远远小于光速, 且忽略相对论效应.

在本文中, 我们首先简要阐述了经典和动生麦克斯韦方程组的建立背景; 其次, 对低速运动介质系统和加速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组进行系统讨论; 然后介绍力-电-磁多场耦合下的能量守恒定律; 紧接着, 明确动生麦克斯韦方程组与经典麦克斯韦方程组的耦合与衔接关系, 以及电磁发电机理论与电磁波理论的统一表述问题; 最后进行系统性地总结和展望.

2 低速运动介质系统的动生麦克斯韦方程组

如前所述, 经典麦克斯韦方程组成立的条件是默认介质处于静止状态^[7,8,29]. 我们从四大基本物理定律的积分式出发, 相应的积分表达式为

$$\oint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f d\mathbf{r}, \quad (3a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (3b)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (3c)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_C \mathbf{J}_f \cdot d\mathbf{s} + \frac{d}{dt} \iint_C \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s}. \quad (3d)$$

如果满足以下基本边界条件: (1) 介质进行非匀速运动且速度远小于光速, $|\mathbf{v}| \ll c$; (2) 电磁现象发生范围 $\mathbf{r}$ 远小于事件时间间隔内光传播的距离: $|\mathbf{r}| \ll ct$; 所以, 相对论效应可以忽略; (3) 电磁现象随时间的变化率远小于它的空间变化率. 在这些条件下, 伽利略时空观成立, 即 $\mathbf{r}$ 和 t 完全独立. 利用场论中时间微分作用在通量上的数学等式, 得到低速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组^[16,17]:

$$\oint_S \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \rho_f d\mathbf{r}, \quad (4a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (4b)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = -\iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}, \quad (4c)$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \iint_C (\mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{s} + \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' \cdot d\mathbf{s} - \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{D}') \cdot d\mathbf{L}, \quad (4d)$$

注意, $\mathbf{D}'$ 表示相对静止介质系统中的电位移矢量. 公式(4c)右边第一项代表磁场随时间变化率的通量, 第二项表示单位电荷在洛伦兹力作用下沿闭合路径移动所产生的动生电动势. 公式(4d)右边第一项表示电流和电荷流动穿过环绕路径 C 的通量; 第二项代表电位移矢量随时间变化率的通量; 最后一项表示介质运动对磁场的影响. 上述方程表明磁通量的变化产生感应电场, 电通量的变化产生环绕的磁场, 两种情况分别由法拉第电磁感应定律和安培-麦克斯韦定律阐明. 特别地, 若与经典麦克斯韦方程组的形式相同, 公式(4)中的 $\mathbf{v}$ 变为0即可^[30]. 另外, 公式(4)中出现的 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{v} \times \mathbf{D}'$ 两项是介质运动产生电磁场的源. 当介质运动时, 介质内部的电磁现象可以直接用动生麦克斯韦方程描述, 介质外面的电磁场变化用经典麦克斯韦方程组揭示, 两者分区管辖, 互相耦合.

若物体的运动速度远小于光速($v \ll c$)时, 可以忽略相对论效应, 只考虑一个坐标系; 且在该坐标系中, 观察者处于静止状态, 观察在空间中任意低速运动的物体; 若物体的体积和边界均随时间发生变化, 尤其是存在外力作用时, 相对论电动力学无法精确解决上述问题. 这是我们进一步推导形状与速度均依赖时间的动生麦克斯韦方程组的出发点. 所有的场矢量都在

观察者所在的坐标系中表示, 描述场的坐标和时间也在该坐标系中定义, 即 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}'(\mathbf{r}, t)$, $\rho_f(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t)$. 从数学的角度, 直接结合斯托克斯定理和散度定理, 描述具有任意运动速度场 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ 介质的动生麦克斯韦方程组表达式为^[17,19]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t) = \rho_f(\mathbf{r}, t), \quad (5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5b)$$

$$\nabla \times [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times [\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t)] \\ = \mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t) + \rho_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (5d)$$

电荷守恒定律为^[17,19]

$$\nabla \cdot [\mathbf{J}_f(\mathbf{r}, t) + \rho_f(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] + \frac{\partial}{\partial t} \rho_f(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (6)$$

其中, $\rho_f \mathbf{v}$ 表示以一定速度 $\mathbf{v}$ 运动的自由电荷所产生的局部电流. 结合积分形式(4a)~(4d), 其边界条件为^[17,19]

$$[\mathbf{D}'_2 - \mathbf{D}'_1] \cdot \mathbf{n} = \sigma_f, \quad (7a)$$

$$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (7b)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 - \mathbf{v} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)] = 0, \quad (7c)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 - \mathbf{v} \times (\mathbf{D}'_2 - \mathbf{D}'_1)] = \mathbf{K}_s + \sigma_f \mathbf{v}_s, \quad (7d)$$

其中, $\mathbf{n}$ 为表面法线方向, $\mathbf{K}_s$ 为表面电流密度, σ_f 为表面自由电荷密度, $\mathbf{v}_s$ 为平行于边界的介质的移动速度.

公式(5)是我们最初建立的探索加速运动介质系统电磁场演化规律的拓展型麦克斯韦方程组. 后来, 考虑到楞次定律和动生电动势, 上述结果需要进一步细化和修正, 详见第3节.

3 加速运动介质系统的动生麦克斯韦方程组

3.1 介质的加速运动与“反通量法则”

一般来讲, 当两个观察者以恒定速度相互运动时, 他们观测到的物理现象是相同的, 即惯性系彼此等价. 惯性参考系中没有来自外部机械能输入时, 系统总能量在电场和磁场之间互相转化并且守恒. 非惯性系中的运动介质, 必然需要外力驱动. 加速运动介质系统电磁场的动力学变化规律, 比如介质的形状、体积和边界随着时间甚至空间发生变化, 是我们需要面对和解决的重要问题. 注意, 加速运动主要指宏观介质的

加速运动.

我们结合电磁感应定律并通过下面的例子阐述为什么需要拓展麦克斯韦方程组. 费曼的物理学讲义中详举了一些“反磁通量法则”的例子^[28]. 图2(a)为一个金属圆盘在恒定磁场中做转动运动, 它和一个外部电阻用导线连接成一个回路, 其中导线在圆盘边缘接触点为滑动接触. 若仅仅根据几何面积判断, 总磁通量不变; 根据通量法则

$$\xi_{\text{EMF}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_{s(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (8)$$

其中, Φ_B 表示磁通量, ξ_{EMF} 表示电动势; 计算系统产生的电动势, 则结果为0, 这明显与实验事实不符. 为了解释这个问题, 我们根据张量数学运算公式, 假定介质边界不会发生突变或相对滑动, 式(8)可以进一步推导为^[20,21]

$$\begin{aligned} \xi_{\text{EMF}} &= -\frac{d}{dt} \iint_{s(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\iint_{s(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} - \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{v}$ 表示边界曲面的瞬时运动速度. 根据式(8)可知, 电动势为零的原因是由于忽略了介质的几何形状、边界和体积, 认为电荷的运动轨迹与积分路径重合所致. 然而, 对于几何形状、边界和体积不可忽略的加速运动介质, 计算该加速运动介质系统的电磁场动力学变化时, 我们需要依照公式(9), 即必须考虑电荷质点在介质中的实际输运轨迹, 而不是简单地依照回路的几何形状轨迹进行判断. 所以, 法拉第电磁感应定律的数学表达式也需要进行适当修正, 并对麦克斯韦方程组进行相应拓展, 以满足解决实际问题的需要.

在费曼讲义中(第17-2节), 关于反通量例子, 费曼的解释为“*It must be applied to circuits in which the material of the circuit remains the same. When the material of the circuit is changing, we must return to the basic laws. The correct physics is always given by the two basic laws $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$.*”^[28] 意为: “材料保持回路不变时, 通量法则一定适用; 若回路的材料改变, 则我们需要回到物理学的两条基本定律, 即 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$ 和洛伦兹力方程 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 解决问题”. 可以看出, 费曼在此处对于通量法则公式(8)的

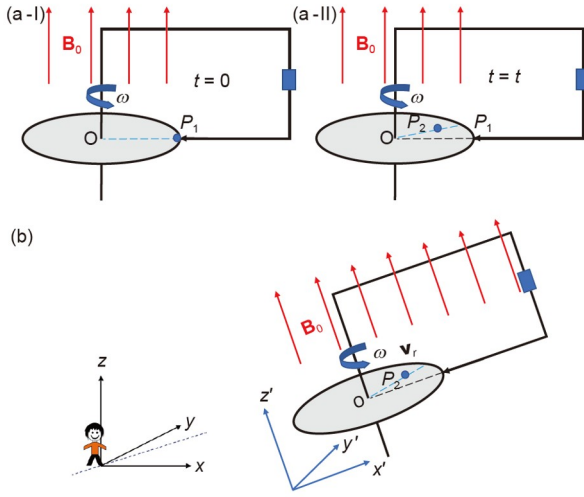


图 2 关于磁通量的典型例子. (a) 一个放在均匀磁场中的矩形闭合线圈, 一端连接在金属盘的轴上, 在 $t = 0$ 至 $t = t$ 时, 一段连接在金属盘边缘. 一段连接在金属盘边缘. 法拉第电磁感应定律中增加一个附加项用来描述单位电荷在介质内运动时的电磁场变化规律. (b) (a) 中所示的整个电路相对于 Bob 所在的实验室参考系进行相对运动^[21]

Figure 2 Several cases regarding the flux rule for electromagnetic induction. (a) A rectangular thin wire circuit that is stationary in a uniform magnetic field, but with one end sliding on the edge of a rotating conductive disc at $t = 0$ and $t = t$, and the other end is connected to the axis of the disc. The unit charge within the macroscopic size object can move, which leads to an additional term in the Faraday's law for electromagnetic induction. (d) The circuit as shown in (a) but the whole circuit has a relative movement with respect to the Lab reference frame where Bob is located in ref. [21].

普适性是比较含糊和不确定的, 也没有清楚的物理解释与数学表达. 实际上公式(9)是法拉第电磁感应定律的完备表述, 而公式(8)是诺伊曼(Neumann)借助于安培的分析在1845年提出的电磁感应定律的数学形式, 其成立与否与回路构成密切相关. 当回路构成不清晰或者无法构成回路时, 无法利用公式(8)进行计算. 公式(9)包含了感应电动势和动生电动势两部分. 公式(8)和(9)的区别主要涉及边界回路(s面)以及公式(9)中出现的速度 $\mathbf{v}$; $\mathbf{v}$ 代表边界曲面的瞬时速度, 而不一定是带电质点的运动速度! 如果仅仅是线形回路而不包含大块介质(导体), 则很容易理解边界回路指的是线形导体本身构成的回路; 此时, 两表达式计算结果相同. 如果闭合回路的结构不发生变化, 导线和介质(导体)之间没有发生相对滑动运动, 比如导线的几何形状固定, 则公式(8)可以准确描述此类情况. 两式若等价, 需要满足的条件为: (1) 构成的回路是线性的, 不包含几何

形状和大小不可以忽略的介质; (2) 磁通量是时间的连续函数, 即磁通量不会发生突变; (3) 若存在多个导体回路时, 两式中面积分的边界和线积分的边界需要时时重合.

对于更为普遍的运动介质情况, 如图2(b)所示, 点电荷质点的运动速度可以表达为 $\mathbf{v}_t = \mathbf{v} + \mathbf{v}_r$, 其中, $\mathbf{v}$ 为随介质运动的参考系的运动速度, 即平移速度, $\mathbf{v}_r$ 为质点相对于介质的运动速度, 例如转动速度, 结合公式(4)得到^[20,21]

$$\oint_C [\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{L} = - \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}, \quad (10)$$

其中, $\mathbf{v}_r$ 表示电荷在介质内的相对运动速度. 同时, 上式表明当介质运动时, 点电荷的运动轨迹可能与积分路径不完全重合. 在介质内部, 由斯托克斯定理得到

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (11)$$

对于运动介质, 公式(10)变为经典的法拉第电磁感应定律公式(1c)时需要满足的两个条件为^[20,21]

(1) 介质或回路的运动速度是常数 $\mathbf{v}_0$ (即惯性坐标系);

(2) 电荷相对于介质的运动速度为0, 即 $\mathbf{v}_r = 0$, 或者介质可以抽象为一个“线形”电路. 对于有一定几何形状和大小的介质, 其运动时的电磁场变化用拓展的麦克斯韦方程组进行定量计算. 无论是否存在几何形状或体积不可忽略的宏观介质, 电荷的运动轨迹与计算磁通量的积分路径是否相同是解决问题的关键. 特别地, 如图2(b)所示, 如果整个闭合回路相对于实验室参考系匀速运动, 且圆盘在转动, 圆盘内的电磁现象可以用公式(11)来描述.

总之, 分三种情况进行讨论^[21]: (1) 作用在点电荷 q 上的洛伦兹力为 $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}_t \times \mathbf{B})$, 如果存在电路的相对运动, 此时需要用 $\mathbf{v}_t \times \mathbf{B}$ 进行计算. (2) 如果仅存在变化的磁场而无介质运动, 将会生成感应电场 $\mathbf{E}$, 则考虑 $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$; 上述两种情况虽然属于不同的物理效应, 但都可以用通量法则: 即电路中产生的电动势等于穿过该电路的磁通量的变化率. (3) 如果电荷的相对移动轨迹被较大的导电介质改变时(图2(b)所示), 无法准确定义某个时刻回路的积分路径进而计算电动势, 此时公式(10)和(11)可以解决此问题.

从理论上讲, 我们无法直接将安培-麦克斯韦定律推广到加速运动的介质系统中. 相对于最初的安培定律, 麦克斯韦定义了位移电流的概念, 并将其以微分的形式引入到方程中, 即在安培定律中加入新项 $\partial \mathbf{D}' / \partial t$, 以此来满足电荷守恒定律. 考虑到电场和磁场之间的对称性, 根据方程(5d)的表达式, 描述介质内部的电磁现象时安培-麦克斯韦定律的等效形式可能为^[20,21]

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v}_r \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}', \quad (12)$$

其中, $\mathbf{D}'$ 为电位移矢量, 其意义与之前的文章保持一致^[11,12], $\mathbf{v}$ 代表介质线路的运动速度.

3.2 加速运动介质系统的动生麦克斯韦方程组

基于以上对加速运动介质系统中法拉第电磁感应定律和安培-麦克斯韦定律的讨论, 加速运动介质内部的电磁场变化规律由以下方程组描述^[20,21].

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f, \quad (13a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (13b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (13c)$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v}_r \times \mathbf{D}') = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'. \quad (13d)$$

若电荷与介质之间没有相对运动, 即 $\mathbf{v}_r = 0$ 时, 公式(13a)~(13d)还原为经典麦克斯韦方程组. 边界条件为

$$[\mathbf{D}'_2 - \mathbf{D}'_1] \cdot \mathbf{n} = \sigma_f, \quad (14a)$$

$$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (14b)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{r2} \times \mathbf{B}_2 - \mathbf{v}_{r1} \times \mathbf{B}_1] = 0, \quad (14c)$$

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 - \mathbf{v}_{r2} \times \mathbf{D}'_2 + \mathbf{v}_{r1} \times \mathbf{D}'_1] = \mathbf{K}_s + \sigma_f \mathbf{v}_s, \quad (14d)$$

其中, $\mathbf{K}_s$ 是界面电流密度, σ_f 是界面的自由电荷密度, $\mathbf{v}_s$ 是整体线路平行于界面的运动速度, $\mathbf{v}_{r1}$ 和 $\mathbf{v}_{r2}$ 分别代表介质1和介质2相对于回路的运动速度.

当空间中存在多个运动介质时, 介质内部的电磁场变化通过动生麦克斯韦方程组确定. 此时, 不用担心真空中出现超光速 c_0 的现象, 介质内部的光速 c_m 永远小于 c_0 , 且 $v_r \ll c_m$. 无论介质是否运动, 描述真空中的电磁场变化使用经典麦克斯韦方程组, 而描述物体内部使用动生麦克斯韦方程组, 两者的解在介质界面

相接并满足边界条件; 因此, 两个方程组之间并不矛盾, 只是作用的区域不同(图3(b)所示).

4 动生极化项 $\mathbf{P}_s$ 与位移电流

在外界机械力作用下, 介质的形状和运动状态一般会发生变化. 若介质表面由于接触起电或压电效应而产生静电荷, 则外界作用力不仅会导致介质表面局部的电荷密度 ρ_s 随时间变化, 同时可能引起局部的“虚拟”电流密度, 进而引起介质极化. 该极化与存在外电场时的感应极化 $\mathbf{P}$ 不同, 它主要由外界作用力引起, 称为动生极化, 用 $\mathbf{P}_s$ 表示. 此时电位移矢量表达式修正为^[24]

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' + \mathbf{P}_s = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} + \mathbf{P}_s = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} + \mathbf{P}_s, \quad (15)$$

方程(15)中, $\varepsilon_0 \mathbf{E}$ 为自由电荷引起的电场, $\mathbf{P}$ 代表存在外电场时介质内部的极化, 称为感应极化, $\mathbf{P}_s$ 为动生极化. 注意 $\mathbf{P}_s$ 主要是由表面静电荷的存在或边界形状随时间变化引起, 它是由多个物体相互运动而产生的极化项; 当同时存在多个移动介质且运动速度均不相同, 该动生极化项非常重要. 从此角度出发, 我们能够从理论上揭示纳米发电机的工作机制. 根据公式(15), 位移电流表达式为^[31]

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_s, \quad (16)$$

$\frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t}$ 代表时变电场引起的位移电流, 称为感应位移电流, $\frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t}$ 代表带电介质物体在外力作用下相互运动产生的电流, 称为动生位移电流. 在纳米发电机电理论中, $\frac{\partial \mathbf{P}_s}{\partial t}$ 是将机械能转化为电能的理论依据. 位移电流不是真正意义上的电流, 它既可以存在于介质中, 又可以分布在真空中.

考虑动生极化项 $\mathbf{P}_s$, 则 $\mathbf{D}'$ 被 $\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s$ 代替, 动生麦克斯韦方程组进一步拓展为^[16,17]

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_s, \quad (17a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (17b)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v}_r \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (17c)$$

$$\nabla \times [\mathbf{H} - \mathbf{v}_r \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s)] = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s). \quad (17d)$$

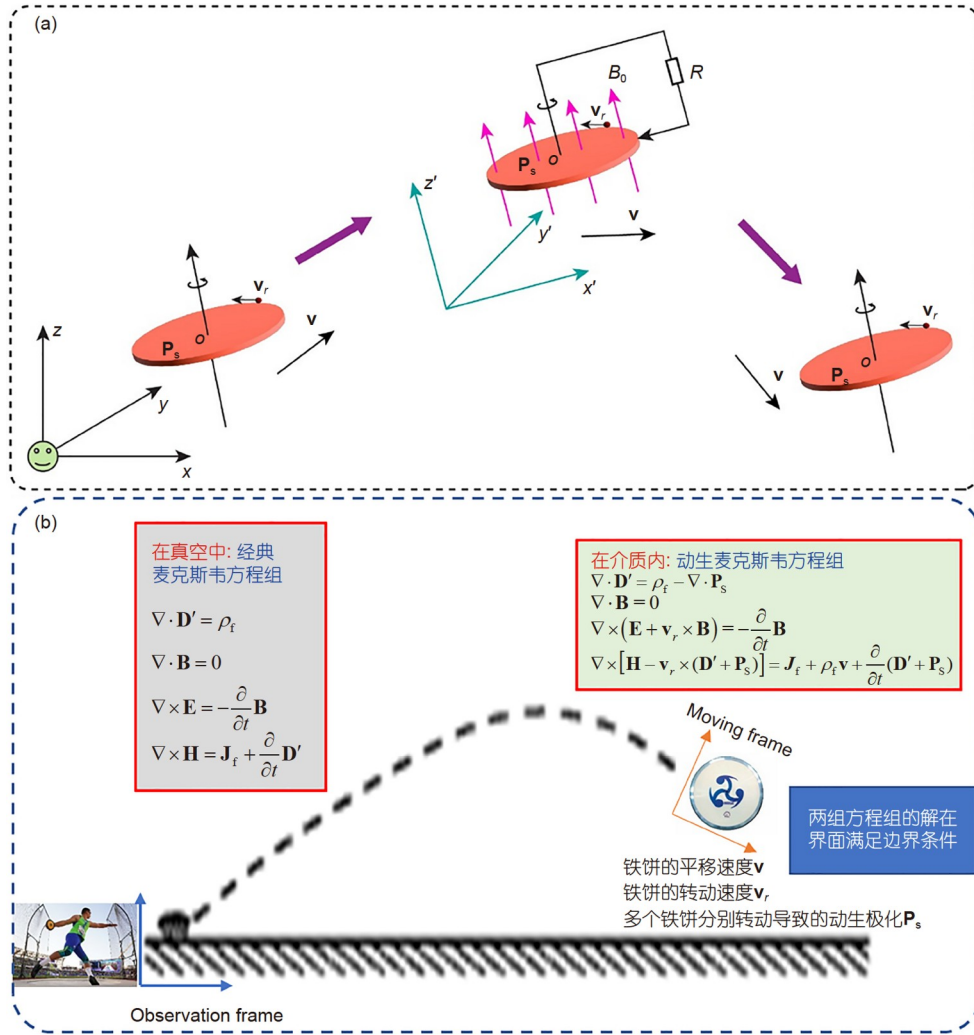


图 3 (a) 利用铁饼运动举例描述加速运动介质系统中的电磁现象, 以及 $\mathbf{P}_s$ 和 $\mathbf{v}_r$ 相关量的定义; (b) 加速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组的物理图像及其方程的应用范围. 铁饼内的电磁现象用动生麦克斯韦方程组描述, 而真空中的电磁现象用经典的麦克斯韦方程组. 两者的解在界面处满足边界条件

Figure 3 (a) Using throwing disk as an example to illustrate the physics of the Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration and the definitions of $\mathbf{P}_s$ and $\mathbf{v}_r$. (b) The physical picture, and all kinds of potential applications. The electromagnetic behavior inside the medium (the moving disk) is the Maxwell's equations for a mechano-driven media system, while that in vacuum is the classical Maxwell's equations; the solutions of the two sets of equations met the boundary conditions at the medium interfaces.

这组方程被定义为标准的动生麦克斯韦方程组. 注意公式(17a)~(17d)中有两个关于速度的项 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{v}_r$, 我们以图3(a)为例, 详细解释两个变量的物理含义. 图3(a)的基本物理含义为: 一个固定坐标系里面的观察者同时观察发生在该坐标系里面的多个电磁现象, 且多个运动介质之间存在相互作用. 其中, 图3(a)中的红色圆盘代表一个正在飞行中的铁饼; $\mathbf{v}$ 表示铁饼的平移速度, $\mathbf{v}_r$ 代表铁饼上某一质点的旋转速度. 在动生麦克斯韦方程中, $\mathbf{v}$ 表示整个系统的平移速度, 比如回路和介

质整体的运动速度, 而 $\mathbf{v}_r$ 代表电荷相对于回路的运动速度. 例如, 当空间中同时存在多个运动的铁饼时, 每个铁饼整体运动的平移速度可以用电流项来描述, 每个铁饼由转动而导致的极化可以用 $\mathbf{P}_s$ 来刻画. 因此, 无论是物理图像还是数学表达式, 动生极化都与感应极化不同, 两者不能合并. 公式(17a)~(17d)描述加速运动介质系统的电磁场变化规律, 该介质系统以任意低速运动, 存在加速度和运动导致的极化现象, 即能够准确阐明力-电-磁场三者之间的耦合情况. 进一步, 从

积分方程出发, 公式(17a)~(17d)的边界条件是^[20,21]

$$[\mathbf{D}'_2 + \mathbf{P}_{S2} - \mathbf{D}'_1 - \mathbf{P}_{S1}] \cdot \mathbf{n} = \sigma_f, \quad (18a)$$

$$[\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (18b)$$

$$\mathbf{n} \times [(\mathbf{E}_2 + \mathbf{v}_{r2} \times \mathbf{B}_2) - (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v}_{r1} \times \mathbf{B}_1)] = 0, \quad (18c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [(\mathbf{H}_2 - \mathbf{v}_{r2} \times (\mathbf{D}'_2 + \mathbf{P}_{S2})) - (\mathbf{H}_1 - \mathbf{v}_{r1} \times (\mathbf{D}'_1 + \mathbf{P}_{S1}))] \\ = \mathbf{K}_s + \sigma_f \mathbf{v}_s. \end{aligned} \quad (18d)$$

方程(18)揭示了运动介质表面存在动生极化时发生在介质内部的电磁现象. 另外, 方程(18)与朱兰成在20世纪50年代末建立的描述运动介质电磁现象的表达式有一定区别^[32]. 朱氏公式考虑了介质运动速度对极化和磁化的影响后引入极化电流项 $\nabla \times (\mathbf{P} \times \mathbf{v}_0)$ 和磁流项 $\nabla \times (\mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{v}_0)$. 文献[33]证明介质运动造成的额外效果可以统一到本构关系中, 麦克斯韦方程组的形式保持不变. 我们的处理方法与朱兰成模型的主要区别之处在于引入的 $\mathbf{P}_s$ 项表示由非电场引起的极化, 比如由接触起电或者压电效应引起的极化现象. 所以, $\mathbf{P}_s$ 项与 $\mathbf{P}$ 项两者的物理意义有根本不同. 同时说明方程组不满足洛伦兹协变性, 而朱氏理论也是非相对论理论, 同样不保持洛伦兹协变性^[18].

5 力-电-磁多场耦合下的能量守恒定律

静态电磁场的能量以电场和磁场的形式分别存储在场空间中, 对于动态电磁场, 通常电磁波携带能量, 但电磁能量仍然符合能量守恒和转换定律. 电磁场一般与实物系统并存, 且两者之间存在相互作用. 我们可以研究电磁场与运动物体相互作用时电磁场能量与物体机械能之间的转换过程来理解电磁场的能量和动量变化过程. 低速运动介质系统的电磁场能量是否守恒以及能量如何流动同样值得我们关注. 结合电荷的定域守恒性, 我们尝试分析低速运动介质系统的电磁场能量和能流演化规律. 运动介质与电磁场两者之间由于相互作用, 存在能量转换过程. 当存在 $\mathbf{P}_s$ 项时, 外力、电磁场和运动介质三者之间发生能量交换, 导致力-电-磁多场耦合现象. 我们利用电磁场的能量密度 u (标量场)和电磁场的能流密度 $\mathbf{S}$ (矢量场)研究力-电-磁多场耦合下的能量变化规律. 由于场分布在空间中且封闭系统的总能量守恒, 关于静止介质系统的 u 和 $\mathbf{S}$ 的表达式同样适用于运动物体系统.

结合坡印廷定理, 在动态电磁场中, 单位时间内穿过单位面积向外传递的电磁场能量为

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (19a)$$

电磁场的能量密度变化率为

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (19b)$$

当含有 $\mathbf{P}_s$ 项的低速运动介质时, 系统的能量变化为^[16~18]

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \mu - \nabla \cdot \mathbf{S} \\ = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \\ + \{ \mathbf{H} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{B})] + \mathbf{E} \cdot [\nabla \times (\mathbf{v}_r \times (\mathbf{D}' + \mathbf{P}_s))] \}. \end{aligned} \quad (19c)$$

公式(19)表征了存储在一定体积中的电磁场能量与从该体积表面辐射出去的电磁能量之和等于电场对外部自由电流和自由电荷的做功, 加上介质在空间运动引起的电磁能量密度的变化. 所以, 由于外力作用, 机械能和电磁能之间发生能量转换, 系统的电磁能量不守恒, 但封闭系统的总能量守恒; 此时, 动生麦克斯韦方程组不保持洛伦兹协变性. 公式(19c)表明此处介质运动是产生电磁波的“源”(动生电磁场), 运动的介质可以看作是“运动的电磁场源”. 力-电-磁场耦合系统能量变化与一般描述电磁波携带电磁能量系统的区别如下: (1) 运动物体与电磁场之间存在相互作用, 尤其是物体进行高速运动时因其不断向外辐射电磁波而消耗能量, 所以, 单独考虑运动物体与电磁场组成的系统能量不守恒; (2) 因为电场和磁场力对物体做功, 单位体积内的电磁能量一部分从体积表面流出, 另一部分消耗在介质上. 公式(19c)中的 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f$ 表示在电场 $\mathbf{E}$ 的作用下, 由于传导电流的流动而消耗的欧姆功率(通常以热量形式散发); (3) 若物体运动速度为零, 公式(19)与原经典方程的区别由 $\mathbf{P}_s$ 项引起.

6 动生麦克斯韦方程组与麦克斯韦方程组的耦合与衔接

在实际工程应用中, 动生麦克斯韦方程组可以解决包含多个动态介质的电磁场变化规律问题, 比如动生电的输出功率和电磁辐射等. 对于低速(相对于光速)介质运动系统, 近似处理是一个非常好的方法. 另外, 当存在外力时, 我们引入与外力相关的 $\mathbf{P}_s$ 项来研究

力、介质和电磁场之间的能量转换过程. 此时, 系统的电磁能量不守恒, 但封闭系统的总能量守恒. 特别地, 因为一般介质折射率不为零, 所以介质中不存在超光速的问题. 介质运动是产生电磁波的源之一(动生电磁场), 描述介质源里面的电磁现象使用动生麦克斯韦方程组. 当源产生的电磁波在空间传播时用狭义相对论和麦克斯韦方程组来表征. 真空和介质里面的光速在介质界面处交接. 因此, 动生麦克斯韦方程组描述介质内部的电磁规律, 经典麦克斯韦方程组描述真空中的电磁规律, 两者“分区域”管辖, 它们的解互相耦合, 在界面处满足边界条件. 所以, 两个方程组可以分区域平行应用, 不互相取代, 并不矛盾(图3(b)). 同时, 由于介质的加速运动, 动生麦克斯韦方程组一般不具有惯性系中的协变性. 更进一步, 动生麦克斯韦方程组对场论等相关理论没有影响!

7 电磁发电机理论与电磁波理论的统一表述

电磁发电机工作原理的基础是法拉第电磁感应定律, 在机械力作用下导体切割磁感线, 由于电荷受到洛伦兹力作用在导线内部产生定向流动的传导电流. 电动机的工作原理正好相反, 它的导线内部流动的传导电流与磁场相互作用, 进而产生驱动转矩. 目前设计电磁发电机和电动机时主要考虑导线内的传导电流, 而较少或基本不考虑因转子转动产生的电磁辐射, 即使辐射确实存在. 另外, 在电磁波空间传播理论中, 一般也不考虑因为介质机械运动(机械功)而产生的电流, 即不考虑传导电流 $\mathbf{J}$ 是如何产生的, 而仅关心电流振荡所产生的电磁辐射. 假设介质处于静态的条件下, 直接运用麦克斯韦方程组探究电磁波在真空或介质中的传播规律. 目前的大多数研究一般分别考虑上述两种情况, 并没有把两者直接联系起来进行统一系统分析; 而动生麦克斯韦方程组可以将两种情形有机结合并统一描述出来(图4), 这是拓展经典麦克斯韦方程组的一个典型表现. 带电介质低速运动时辐射出的电磁波在我们的实验中已被观察到, 该现象在传感和信息收集方面可能有新的用途.

另外, 从不同时空观的角度对经典麦克斯韦方程和动生麦克斯韦方程组进行了分析比较. 图5所示为采用洛伦兹变换和伽利略变换两种方法计算运动介质电磁场动力学变化规律的区别. 洛伦兹变换原则上可

以计算惯性系中任意匀速运动介质的电磁场, 但当存在多个不同速度、运动轨迹的介质, 且介质之间有电磁相互作用时, 洛伦兹变换方法无法解决; 虽然瞬时坐标系变换从理论上似乎可以解决, 但其复杂性显而易见! 相反, 若介质运动速度远小于光速, 尤其是符合低速运动介质系统的动生麦克斯韦方程组假设的三个条件时(详见第2节), 采用伽利略变换能够大大简化计算, 更符合实际应用场景.

8 动生麦克斯韦方程组的通解

麦克斯韦方程组的求解本质上是求解电磁场问题. 一般源的分布已知时, 可以求解场的分布; 实际为求解一个齐次或非齐次的二阶线性偏微分方程. 求解方法有位函数, 比如辅助标量势 ϕ 和磁矢量势 $\mathbf{A}$ 等^[34]; 或者一般解析法如分离变量法、格林函数法和级数展开法等等以及数值法进行求解^[34]. 由于动生麦克斯韦方程组的适用范围很广以及相应边界条件的特殊性, 无论对于时变场和时谐场, 我们均可以采用类似于微扰论中级数展开的方法求解方程组^[16,17,19].

8.1 时域空间

首先考虑在时域空间中的情形, 将动生麦克斯韦方程组(17a)~(17d)按照 λ ($\lambda = 1$)参数的顺序展开

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \lambda \mathbf{E}_1 + \lambda^2 \mathbf{E}_2 + \dots, \quad (20a)$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}'_0 + \lambda \mathbf{D}'_1 + \lambda^2 \mathbf{D}'_2 + \dots, \quad (20b)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \lambda \mathbf{H}_1 + \lambda^2 \mathbf{H}_2 + \dots, \quad (20c)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \lambda \mathbf{B}_1 + \lambda^2 \mathbf{B}_2 + \dots, \quad (20d)$$

将上述结果代入动生麦克斯韦方程组(17a)~(17d), 合并同类项, 对于零级近似

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_0 = \rho_0, \quad (21a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0, \quad (21b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_0, \quad (21c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{J}_0 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'_0, \quad (21d)$$

其中,

$$\rho_0 = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}_s, \quad (21e)$$

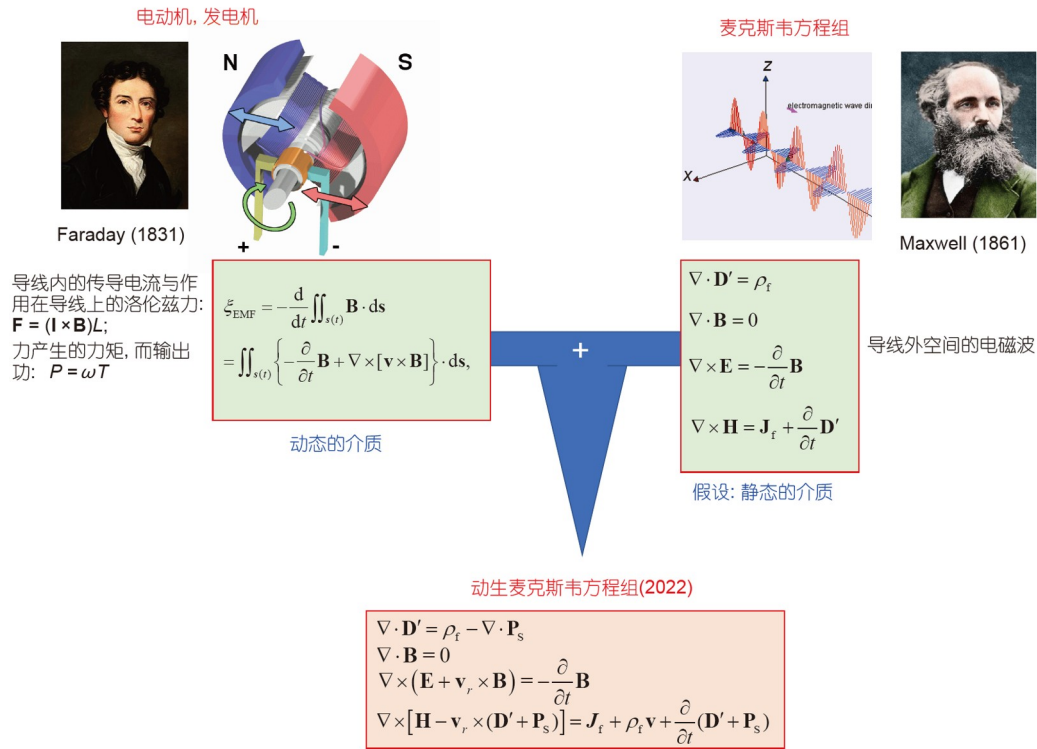


图 4 动生麦克斯韦方程组是关于电磁发电机/电动机理论和麦克斯韦电磁波理论的统一表述^[21]

Figure 4 The Maxwell's equations for a mechano-driven system is a unification of the theory for electromagnetic generator/motor and the theory of electromagnetic waves [21].

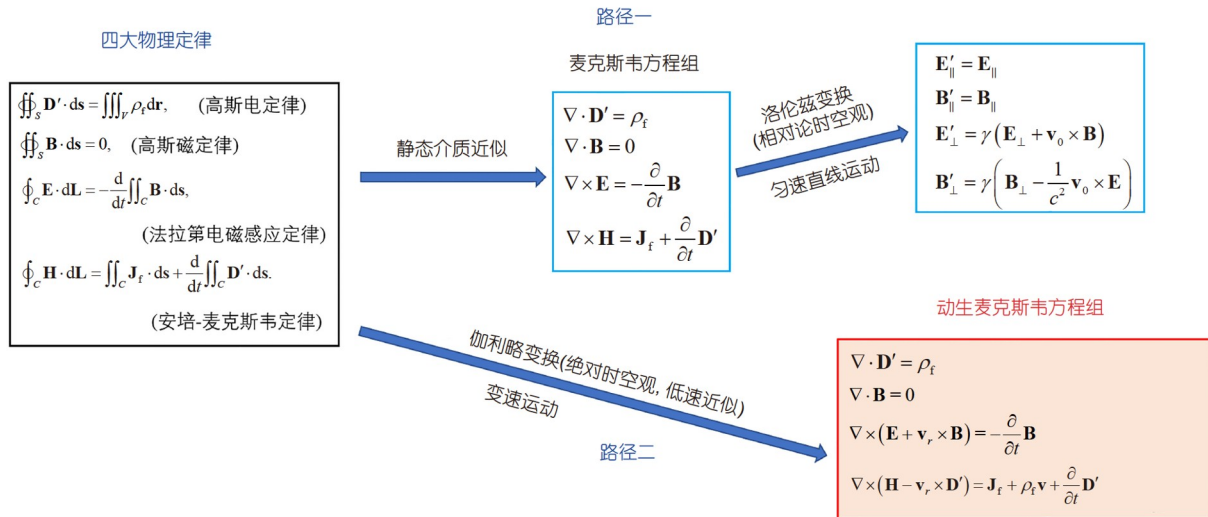


图 5 物理图像与数学表达式: 从四大物理定律出发进行洛伦兹变换和伽利略变换的结果比较^[18]

Figure 5 Physical pictures and mathematical expressions: Starting from the integral form of the four physics laws, the calculation results are compared through Lorentz's transformation and Galilean transformation [18].

$$\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_f + \rho_f \mathbf{v} + \nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{P}_s) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}_s. \quad (21f)$$

方程组(21a)~(21d)可以用矢量势、赫兹矢量等方

法进行求解, 这组方程的特解可以参考Jackson书的6.5

节而得到. 对于一级近似

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_1 = 0, \quad (22a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0, \quad (22b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{F}_1 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_1, \quad (22c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_1 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'_1, \quad (22d)$$

其中,

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}_0), \quad (22e)$$

$$\mathbf{J}_1 = \nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{D}_0), \quad (22f)$$

可以进一步得到

$$\nabla^2 \mathbf{E}_1 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_1 = -\nabla \times \mathbf{F}_1 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_1, \quad (23a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_1 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}_1 = -\nabla \times \mathbf{J}_1 - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_1. \quad (23b)$$

对于二级近似^[16],

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_2 = 0, \quad (24a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_2 = 0, \quad (24b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = \mathbf{F}_2 - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}_2, \quad (24c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_2 + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}'_2, \quad (24d)$$

其中,

$$\mathbf{F}_2 = -\nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{B}_1), \quad (24e)$$

$$\mathbf{J}_2 = \nabla \times (\mathbf{v}_r \times \mathbf{D}_1), \quad (24f)$$

使用同样的处理方法, 则

$$\nabla^2 \mathbf{E}_2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_2 = -\nabla \times \mathbf{F}_2 + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_2, \quad (25a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}_2 = -\nabla \times \mathbf{J}_2 - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_2. \quad (25b)$$

注意更高阶的计算可以用类似的方法进行. 方程组的全解包含各阶的通解和特解, 并且全解要满足边界条件, 具体解法可以参考文献[7].

8.2 频域空间

当介电常数等参数随着频率发生变化时, 为了阐明频率的影响, 使用傅里叶变换和反变换的方法进行, 详细过程如下:

$$a(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} a(\mathbf{r}, t), \quad (26a)$$

$$a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} a(\mathbf{r}, \omega). \quad (26b)$$

在频率空间中 $\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{E}'$, 以及 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{B}$ 之间的关系

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (27a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (27b)$$

注意上式使用经典的本构关系, 没有考虑介质运动引起的变化. 通过傅里叶变换, 结合微扰论, 对于零级近似, 我们得到

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_0(\mathbf{r}, \omega) = \rho_0(\mathbf{r}, \omega), \quad (28a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (28b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, \omega), \quad (28c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}'_0(\mathbf{r}, \omega). \quad (28d)$$

对公式(28c)和(28d)两边取旋度, 并整理得到

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, \omega) \\ = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho_0(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (29a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{H}_0(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla \times \mathbf{J}_0(\mathbf{r}, \omega), \quad (29b)$$

上述方程的特解为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{0s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega \sqrt{\mu\epsilon} \Delta r')}{\Delta r'} \\ \times \left[-\frac{1}{\epsilon} \nabla' \rho_0(\mathbf{r}', \omega) + i\omega \mathbf{J}_0(\mathbf{r}', \omega) \right] d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (30a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{0s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega \sqrt{\mu\epsilon} \Delta r')}{\Delta r'} \\ \times [\nabla' \times \mathbf{J}_0(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (30b)$$

其中, $\Delta r' = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. 方程(29)的全解可以参考杰斐姆柯方程(Jefimenko's equation)^[8]. 对于一级近似

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_1(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (31a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (31b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, \omega), \quad (31c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{D}'_1(\mathbf{r}, \omega). \quad (31d)$$

进一步推导

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla \times \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}, \omega) = -\nabla \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, \omega) + i\omega \mathbf{F}_1(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (32b)$$

全解由特解和通解组成, 特解为

$$\mathbf{E}_{1s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\Delta r')}{\Delta r'} \times [\nabla' \times \mathbf{F}_1(\mathbf{r}', \omega) + i\omega\mathbf{J}_1(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}', \quad (33a)$$

$$\mathbf{H}_{1s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\Delta r')}{\Delta r'} \times [\nabla' \times \mathbf{J}_1(\mathbf{r}', \omega) - i\omega\mathbf{F}_1(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}'. \quad (33b)$$

对于二级近似

$$\nabla \cdot \mathbf{D}'_2(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (34a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_2(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (34b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \omega) + i\omega\mathbf{B}_2(\mathbf{r}, \omega), \quad (34c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{J}_2(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\mathbf{D}'_2(\mathbf{r}, \omega). \quad (34d)$$

运用同样的方法

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, \omega) \\ = -\nabla \times \mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \omega) - i\omega\mathbf{J}_2(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, \omega) + \mu\epsilon\omega^2 \mathbf{H}_2(\mathbf{r}, \omega) \\ = -\nabla \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}, \omega) + i\omega\mathbf{F}_2(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (35b)$$

特解如下

$$\mathbf{E}_{2s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\Delta r')}{\Delta r'} \times [\nabla' \times \mathbf{F}_2(\mathbf{r}', \omega) + i\omega\mathbf{J}_2(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}', \quad (36a)$$

$$\mathbf{H}_{2s}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\exp(i\omega\sqrt{\mu\epsilon}\Delta r')}{\Delta r'} \times [\nabla' \times \mathbf{J}_2(\mathbf{r}', \omega) - i\omega\mathbf{F}_2(\mathbf{r}', \omega)] d\mathbf{r}'. \quad (36b)$$

与时域空间相同, 方程组的总解包含各阶的通解和特解之和, 并且全解要满足边界条件, 详细解法可以参考文献[7].

9 结论与展望

9.1 结论

本文详细阐述了适用于低速、非匀速运动介质系统中, 动生麦克斯韦方程组的构建背景、物理图像、主要特点, 与经典方程组之间的区别和联系、求解方法、可能的应用范围等, 为探究实际工程应用中运动系统的电磁场动力学演化规律提供新方法和新思路.

最后, 基于动生麦克斯韦方程组理论, 我们对其在科学和技术方面的潜在影响和未来可能的新兴领域进行了展望.

动生麦克斯韦方程组理论的核心内容如下^[16-21].

(1) 从四大物理定律的积分形式出发, 基于伽利略时空观推导出实验室坐标系中的场($\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$), 探究低速变速运动的、具有复杂运动轨迹的、多个运动介质的电磁场动力学演化规律问题.

(2) 适用于低速变速运动介质 $\mathbf{v}(t)$ 、介质形状和边界可变的介质 $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

(3) 方程组引入力-电-磁的耦合场, 对于在非惯性系中做复杂运动的介质, 当其速度较小且忽略相对论效应时, 方程组可以揭示力-电-磁多场耦合系统的电磁场动力学演化规律.

(4) 由于外力作用, 系统的电磁能量不守恒, 机械能和电磁场能量互相转换, 但封闭系统的总能量守恒.

(5) 物体运动是产生电磁波的源之一(动生电磁场), 描述物体里面的电磁现象使用动生麦克斯韦方程组; 当源产生的电磁波在空间传播时使用经典麦克斯韦方程组, 两者在物体(介质)界面相接并满足边界条件.

(6) 描述观察者在实验室系观测同时发生的多个相对运动物体的电磁现象, 且物体之间存在相互作用, 可以用方程组对物体内部电磁场的分布和大小的演化规律处进行近似求解处理.

(7) 介质内部的电磁现象用动生麦克斯韦方程组描述. 因为介质中的光速 c_m 总是小于 c_0 , 因此不存在超光速问题; 一旦电磁波产生, 其在介质之间的传播规律用经典的麦克斯韦方程组来描述, 满足光速不变原理.

(8) 当物体进行匀速直线运动, $\mathbf{v}_r = 0$, 动生麦克斯韦方程组表达式(13)回归到经典麦克斯韦方程组的形式, 保证了整体理论系统的逻辑性和自洽性.

(9) 动生麦克斯韦方程组的求解方法: 本质上是求解一个齐次/非齐次的二阶线性偏微分方程, 由于方程组的复杂性和边界条件的特殊性, 可以使用类似于微扰论中级数展开的方法进行求解.

(10) 对于工程应用相关的非匀速运动介质系统中的电磁场变化, 动生麦克斯韦方程组能够解决相关问题. 该处理方法适合于应用物理领域, 并且在工程电动力学方面得到广泛应用.

另外, 动生麦克斯韦方程组和经典麦克斯韦方程

组之间的四个主要区别如下, 前者和后者分别重点阐述^[20,21]:

- (1) 加速运动的非惯性系与匀速直线运动的惯性系;
- (2) 包括费曼提出的包括“反通量法则”例子的电磁理论与不包括“反通量法则”的电磁理论;
- (3) 多个运动介质的电动力学问题与单个运动介质的电动力学问题;
- (4) 全场(近场+远场)电动力学与远场电动力学. 传统的电动力学更关注电磁波的远距离传输、反射等电磁现象(远场), 如雷达和天线等; 一般不同时考虑源的运动状态和与源相关的边界条件, 而重点考虑远场的电磁波行为. 动生麦克斯韦方程组不但可以描述远场的电磁行为, 同时也可以探究源附近场的行为(近场); 远场是方程组的特解, 而近场取决于方程组的齐次解; 方程组的全解(全场)需要满足边界条件.

9.2 展望

物理学的每一个分支都有独属于自己的物理量, 这些基本物理量用来描述研究对象的主要特征和变化规律. 电磁学理论的主要基本变量为电荷(电场源)、电流(磁场源)、电场、磁场、电磁波等, 通过基本变量和概念来阐述电磁场理论的基本定律和规律, 研究电场、磁场、电磁相互作用、电磁波以及介质运动和应用等方面的关键问题. 面临的问题有个别的、局部的或者系统性问题, 解决问题并探索原始真理. 然而, 目前的研究似乎更侧重于寻找问题的答案, 而非侧重于问题本身或提出新问题并扩大研究范式. 透彻理解已经解决的问题, 从新的角度理解老问题、发

现新问题和新未知、经过实验验证和逻辑推理来完善抑或建立新的理论体系, 进而深刻阐释实验现象和物理规律, 增加新知识, 扩充学科体系, 拓展人类认知的边界.

从1820年奥斯特(Oersted)发现通电导线可以使小磁针发生偏转现象开始, 到1888年赫兹首次在实验中观察到电磁波, 电磁学理论发展史是一个典型的在科学、技术以及人文方面都不断深化和进步的历史. 期间, 1831年法拉第发现电磁感应定律, 1834年楞次提出楞次定律, 1861年麦克斯韦提出位移电流假说、建立系统的电磁理论并预言光是电磁波. 从一个偶然的实验现象开始, 经过不断探索, 最终构建出一个宏大的理论体系, 并在应用方面取得巨大成就, 对近现代科学技术和人类生活产生了不可估量的影响. 动生麦克斯韦方程组的构建也不是一蹴而就的. 如图6所示, 2006年王中林研究组发明了压电纳米发电机^[31], 2012年发明摩擦电纳米发电机^[22], 这两个新型能量转换器件的发明为动生麦克斯韦方程组的建立提供了坚实的实验基础. 2017年我们在经典麦克斯韦方程组中引入动生极化项 $\mathbf{P}_s$, 用于描述纳米发电机的能量转换特性. 为描述低速/加速运动介质系统的电磁场演化规律, 于2021年系统构建了动生麦克斯韦方程组. 实验已证明构建动生麦克斯韦方程组的必要性, 该方程组的科学意义和技术影响需要进一步的验证和探索.

麦克斯韦方程组从建立到现在尽管已经有150多年的历史, 由于其对现代科学技术的巨大影响, 对麦克斯韦方程组的研究和探索仍然持续进行着. 基于摩擦纳米发电机的能量收集技术只是众多相关应用领域之一. 虽然构建动生麦克斯韦方程组最初是因为纳米发

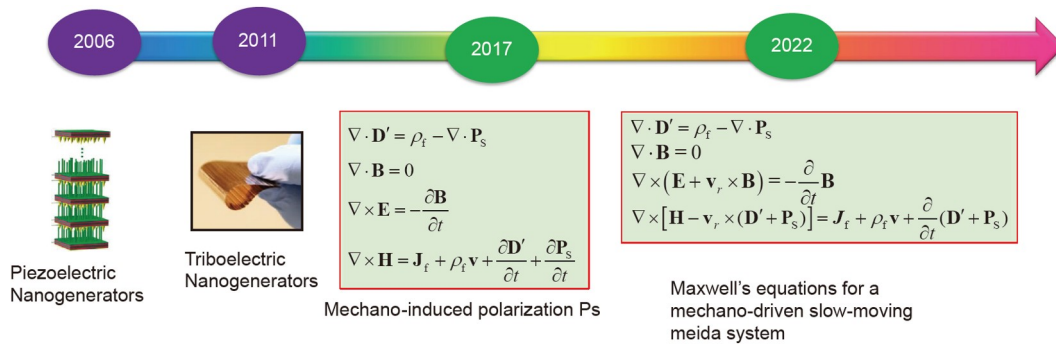


图 6 动生麦克斯韦方程组的发展简史, 未来仍旧值得探讨^[21]

Figure 6 Our journey regarding the expansion of the Maxwell's equations for a mechano-driven slow-moving medium system. The future remains to be discovered [21].

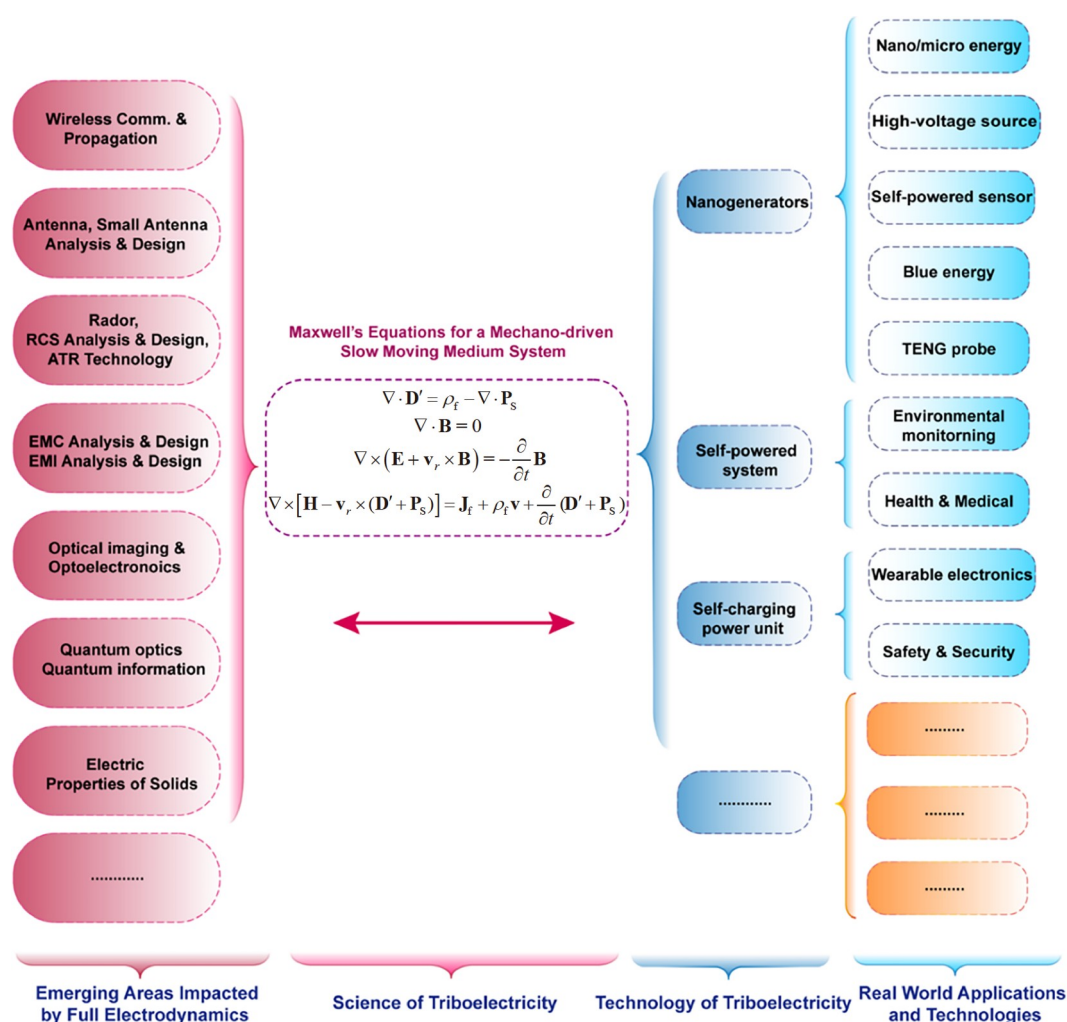


图7 动生麦克斯韦方程组在科学和技术方面的潜在影响

Figure 7 Emerging potential areas impacted by full electrodynamics and technologies based on Maxwell's equations for a mechano-driven slow-moving media system.

电机的实验所驱动, 但其影响并不仅仅局限在能量收集与转换领域. 从历史上看, 人们起初认为电、磁、光学是由不同的物理定律支配的. 但是, 随着对电磁现象的深入探索和理解, 研究者们逐渐发现这三个方面的本质与麦克斯韦方程组紧密关联. 以动生麦克斯韦方程组为理论基础, 纳米发电机、自供电系统和自充电电源包等能源转换与存储领域正在快速发展, 并受到越来越多的关注. 结合方程组的理论研究进展和

实验启发, 我们认为一些潜在的新兴领域非常值得重视(图7), 如无线通信与传播、天线、小型天线分析与设计, 雷达、雷达散射截面(radar cross-section, RCS)分析与设计, 电磁兼容性(electro magnetic compatibility, EMC)和电磁干扰(electro-magnetic interference, EMI)分析与设计, 虚拟现实中的传感、光学成像与光电子学、量子光学、量子信息等. 我们期待未来在这些方面取得更多进展和突破.

参考文献

- Reid J S, Wang C H T, Thompson J M T. James Clerk Maxwell 150 years on. *Phil Trans R Soc A*, 2008, 366: 1651–1659
- Sengupta D L, Sarkar T K. Maxwell, Hertz, the Maxwellians, and the early history of electromagnetic waves. *IEEE Antennas Propag Mag*, 2003,

45: 13–19

- 3 Yang Y, Zhu D, Yan W, et al. A general theoretical and experimental framework for nanoscale electromagnetism. *Nature*, 2019, 576: 248–252
- 4 Bucci O M. From electromagnetism to the electromagnetic field: The genesis of Maxwell's equations. *IEEE Antennas Propag Mag*, 2014, 56: 299–307
- 5 Maxwell J C. On physical lines of force. *Philos Trans Roy Soc London*, 1861, 139: 161–175
- 6 Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field. *Philos Trans Roy Soc London*, 1865, 155: 459–512
- 7 Jackson J D. *Classical Electrodynamics*. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 1999
- 8 David J G. *Introduction to Electrodynamics*. Jia Y, trans. Beijing: China Machine Press, 2021 [大卫·格里菲斯. 电动力学导论. 贾瑜, 译. 北京: 机械工业出版社, 2021]
- 9 Pauli W. *Relativity Theory*. Ling H D, Zhou W S, trans. Beijing: Higher Education Press, 2020 [泡利. 相对论. 凌德洪, 周万生, 译. 北京: 高等教育出版社, 2020]
- 10 Landau L D, Lifshitz E M. *Field Theory*. Lu X, Ren L, Yuan B N, trans. Beijing: Higher Education Press, 2012 [Landau L D, Lifshitz E M. 场论. 鲁欣, 任朗, 袁炳南, 译. 北京: 高等教育出版社, 2012]
- 11 Minkowski H. Das Relativitätsprinzip. *Annalen der Physik*, 1915, 352: 927
- 12 Minkowski H. *The Principle of Relativity*. Calcutta: University Press, 1920
- 13 Le Bellac M, Lévy-Leblond J M. Galilean electromagnetism. *Nuovo Cim B*, 1973, 14: 217–234
- 14 Rousseaux G. Forty years of Galilean Electromagnetism (1973–2013). *Eur Phys J Plus*, 2013, 128: 81
- 15 de Montigny M, Rousseaux G. On the electrodynamics of moving bodies at low velocities. *Eur J Phys*, 2006, 27: 755–768
- 16 Wang Z L. On the expanded Maxwell's equations for moving charged media system—General theory, mathematical solutions and applications in TENG. *Mater Today*, 2022, 52: 348–363
- 17 Wang Z L. Maxwell's equations for a mechano-driven, shape-deformable, charged-media system, slowly moving at an arbitrary velocity field $v(r, t)$. *J Phys Commun*, 2022, 6: 085013
- 18 Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed motion media system under slow motion and nonrelativistic approximations (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2022, 52: 1198–1211 [王中林, 邵佳佳. 非匀速运动介质系统中的动生麦克斯韦方程组-低速与非相对论近似. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1198–1211]
- 19 Wang Z L, Shao J J. Maxwell's equations for a mechano-driven varying-speed-motion media system for engineering electrodynamics and their solutions (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2022, 52: 1416–1433 [王中林, 邵佳佳. 面向工程电磁学的动生麦克斯韦方程组及其求解方法. 中国科学: 技术科学, 2022, 52: 1416–1433]
- 20 Wang Z L. The expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration. *Intern J Modern Phys B*, 2022, 37: 2350159
- 21 Wang Z L, Shao J J. From Faraday's law to the expanded Maxwell's equations for a mechano-driven media system that moves with acceleration (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2023, 53: 430–444 [王中林, 邵佳佳. 从加速运动介质中的法拉第电磁感应定律到拓展的麦克斯韦方程组. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 430–444]
- 22 Fan F R, Tian Z Q, Wang Z L. Flexible triboelectric generator. *Nano Energy*, 2012, 1: 328–334
- 23 Wang Z L. From contact electrification to triboelectric nanogenerators. *Rep Prog Phys*, 2021, 84: 096502
- 24 Wang Z L. On the first principle theory of nanogenerators from Maxwell's equations. *Nano Energy*, 2020, 68: 104272
- 25 Shao J, Willatzen M, Wang Z L. Theoretical modeling of triboelectric nanogenerators (TENGs). *J Appl Phys*, 2020, 128: 111101
- 26 Cao X, Zhang M, Huang J, et al. Inductor-free wireless energy delivery via Maxwell's displacement current from an electrodeless triboelectric nanogenerator. *Adv Mater*, 2018, 30: 6
- 27 Chen C, Wen Z, Shi J, et al. Micro triboelectric ultrasonic device for acoustic energy transfer and signal communication. *Nat Commun*, 2020, 11: 4143
- 28 Feynman R P. *The Feynman Lectures on Physics*. Vol. II: Mainly Electromagnetism and Matter. New Millennium ed. edition, Basic books, A member of the Perseus books group, New York, 2011, P17-2
- 29 Wang Y P. *Engineering Electrodynamics* (in Chinese). Xi'an: Xidian University Press, 2007 [王一平. 工程电动力学. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2007]
- 30 Cui X. From Faraday's law of induction to Maxwell's equations of motion (in Chinese). In: *Proceedings of the Ninth Annual Conference of the*

Institute of Circuits and Signaling Systems, Electromagnetic Field Teaching and Textbook Research Association in Higher Education Institutions. Hohhot, 2014 [崔翔. 由法拉第感应定律谈运动中的麦克斯韦方程组. 见: 高等学校电路和信号系统、电磁场教学与教材研究会第九届年会论文集. 呼和浩特, 2014]

- 31 Wang Z L, Song J. Piezoelectric nanogenerators based on zinc oxide nanowire arrays. *Science*, 2006, 312: 242–246
- 32 Paul P, Haus H A. *Electrodynamics of Moving Media*. Cambridge: MIT Press, 1967
- 33 Wang W Y, Xu Y. Lorentz covariant form of electromagnetism in the moving media (in Chinese). *Phys Eng*, 2018, 28: 13 [王雯宇, 许洋. 运动介质洛伦兹协变电磁理论. *物理与工程*, 2018, 28: 13]
- 34 Elsherbeni A, Demir V. *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulation*. Yu Z Y, trans. Beijing: National Defence Industry Press, 2012 [Elsherbeni A, Demir V. MATLAB模拟的电磁学时域有限差分法. 喻志远, 译. 北京: 国防工业出版社, 2012]

Theory of Maxwell's equations for a mechano-driven media system for a non-inertia medium movement system

WANG ZhongLin^{1,2,3} & SHAO JiaJia^{1,2}

¹ *Beijing Institute of Nanoenergy and Nanosystems, Chinese Academy of Sciences, Beijing 101400, China;*

² *School of Nanoscience and Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;*

³ *School of Materials Science and Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta 30332-0245, USA*

Starting from the practical engineering applications, we derived Maxwell's equations for a mechano-driven, media system (MEs-f-MDMS) based on Galilean space and time. This expanded Maxwell's equations should reveal the dynamics of an electromagnetic field for a general case, in which the medium has a time and or space-dependent volume, shape, and boundary and may move in an arbitrary, slow-moving velocity field $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. This paper systematically reviews the studies and theories of the MEs-f-MDMS, which includes the basic construction background, physical picture, the essential differences and relations of the classical Maxwell's equations, solving process of the nonlinear equations, and all kinds of potential applications. Most importantly, in comparison to the existing classical electrodynamics, the newly developed MEs-f-MDMS marks four unique advances, which have been summarized and the near field electrodynamics vs. the far field electrodynamics are proposed. Finally, in this work, it also takes analysis and forecast toward this newly built MEs-f-MDMS in science and technology for the future.

Maxwell's equations for a mechano-driven system, mechano-driven polarization, displacement current, non-inertia medium movement, Faraday's law of electromagnetic induction, "anti-flux rule"

doi: [10.1360/SST-2023-0062](https://doi.org/10.1360/SST-2023-0062)